SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Opuscula ad res physicas, et mathematicas pertinentes

Autor: Riccati, Vincenzo

Verlag: Aquinatis

Ort: Bononiae

Jahr: 1757

Kollektion: mathematica

Signatur: 8 MATH I, 2915:1

Werk Id: PPN61578674X

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN61578674X|PPN61578674X

OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=61578674X

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

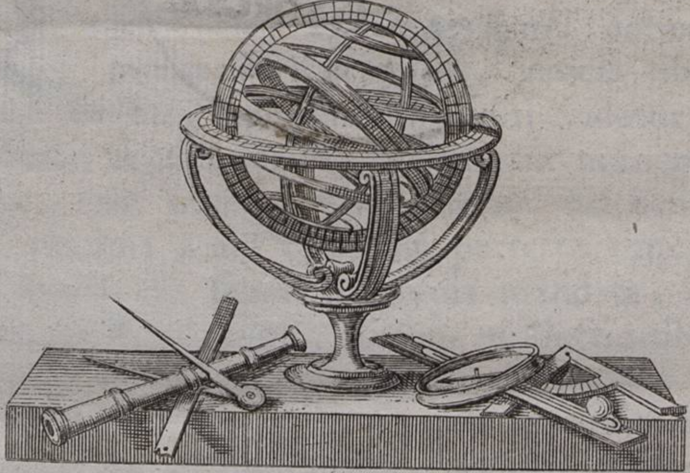
VINCENTII RICCATI

SOC. JESU

OPUSCULORUM

Ad res Phyſicas, & Mathematicas pertinentium

TOMUS PRIMUS.



BONONIÆ

Apud Lælium a Vulpe Inſtituti Scientiarum Typographum.
MDCCLVII.
SUPERIORUM AUCTORITATE.

Ex
Bibliotheca
Acad. Georgiae
Augustae.

PRÆFATIO.

QUanam de cauſſa id conſilii ceperim, ut omnia mea opuſcula ſimul collecta in publicum emitterem, paucis tibi, Benevole Lector, aperiendum mihi videtur. Annis hiſce ſeptemdecim, quibus, ut munere meo fungar, tum puram, tum mixtam matheſim doceo, plurima a me opuſcula perfecta ſunt, quorum multa aut ſeparatim typis mandata, aut in Academia Bononienſi, aliiſque collectionibus inſerta in doctorum manus pervenerunt: plura vero ſcripta manu habebam, quæ cum amicis, diſcipuliſque communicata, ab iiſdemque tranſcripta, & in aliquot Italiæ civitates delata non prorſus deliteſcebant.

Quamobrem multæ ad me, & frequentes veniebant petitiones, ut aliquod ex meis opu-

ſculis huc illuc mittendum curarem. Quæ ſeparatim edita ſunt, donec ſuppetebant exemplaria, mittebam libentiſſime. Alia autem oportebat, ut viris analyſeos ignaris tranſcribenda committerem, & tranſcripta magna cura diligentiaque corrigerem; quæ res maxima me moleſtia afficiebat, tum per ſeſe, tum quod otium, quo non abbundo, mihi adimebat in ſtudiis utiliter conſumendum. Accedit, quod exemplaria permulta, quæ nemine corrigente in aliis civitatibus facta ſunt, adeo vitioſa erant, & errorum plena, ut ne ipſe quidem aliquando quidquam intelligere potuiſſem, niſi ea cum meo exemplari contuliſſem. Ut me hiſce incommodis, moleſtiiſque liberarem, ſtatui eadem opuſcula in plures tomos diſtributa formis imprimere, atque hoc pacto eorum, qui illa quotidie flagitant, petitionibus ſatisfacere.

Verumtamen ne quis forte putet, omnia mea opera ſe in hac collectione habiturum, aperte profiteor, me tantum epiſtolas, ac diſquiſitiones, quæ breviora quædam ſunt opuſcula, hic edere, non autem libros, qui ſin minus magno, juſto ſaltem volumine continentur. Quare fruſtra requires aut Dialogos italice conſcriptos de Viribus vivis, & de actionibus potentiarum, aut Commentarium de uſu motus

tra-

tractorii in conſtructione æquationum differentialium, aut Commentarium alterum de ſeriebus recipientibus ſummam algebraicam, aut exponentialem: qui libri omnes impreſſi ſunt Bononiæ, tertius typis Hæredum Conſtantini Piſarii, & Jacobi Phylippi Primodii anno 1756, primus, & alter typis Lælii a Vulpe annis 1749, 1752. Alia opuſcula omnia in plures tomos diſtributa reperies.

Nunc vero prodit tomus primus, qui, ſi excipias diſquiſitionem de centro æquilibrii, & epiſtolas duas, omnia inedita continebit. In aliis tomis edendis optandum, ut quemadmodum mea diligentia non deerit, ita ne typographæ quidem diligentia deſideretur.

INDEX OPUSCULORUM.

OPUSCULUM PRIMUM.

De centro Æquilibrii. Diſquiſitio Phyſico-Mathematica. pag. 1

OPUSCULUM SECUNDUM.

De Guldini Regula ad uſum centri gravitatis pertinente. Diſquiſitio Phyſico-Mathematica. pag. 18

OPUSCULUM TERTIUM.

De multiplici logarithmorum ſyſtemate. Diſquiſitio Mathematica. pag. 30

OPUSCULUM QUARTUM.

De quarumdam æquationum radicibus. Diſquiſitio duas partes continens, quarum prima agit de earum expreſſione analytica, pag. 45

Altera de earumdem radicum conſtructione. pag. 68

OPUSCULUM QUINTUM.

Solutio Problematis ad inverſam tangentium methodum pertinentis. pag. 95

OPU-

OPUSCULUM SEXTUM.

Epiſtolæ tres, in quibus æquationes aliquæ differentiales evolvuntur per ſeries. pag. 105

OPUSCULUM SEPTIMUM.

Epiſtola exhibens ſolutionem Problematis Kepleriani ſecandi ſemicirculum in data ratione per lineam ductam ex quocumque puncto diametri. pag. 123

OPUSCULUM OCTAVUM.

Epiſtola Phyſico-mathematica, in qua oſtenditur, in quacumque actionis hypotheſi, ſpatia peracta a gravi ſucceſſivis temporibus æqualibus eſſe, ut numeri impares. pag. 126

OPUSCULUM NONUM.

Epiſtolæ duæ agentes de æquationibus cubicis reſolutionem admittentibus. pag. 129

OPUSCULUM DECIMUM.

Epiſtola oſtendens veram Baliani ſententiam de theoria gravium decidentium. pag. 136

OPUSCULUM UNDECIMUM.

Epiſtola, qua theorema Bernoullianum pertinens ad rectificationem curvarum demonſtratur, & amplificatur. pag. 141

OPUSCULUM DUODECIMUM.

De methodo Hermanni ad locos geometricos reſolvendos Epiſtola. pag. 151

OPUSCULUM TERTIODECIMUM.

De præcipuis pendulorum circularium, & cycloidalium proprietatibus Epiſtola. pag. 161

OPUSCULUM PRIMUM.

De centro Æquilibrii. Diſquiſitio Phyſico-Mathematica. (a)

EX multis, ac prope innumeris Scriptoribus, qui de re mechanica egerunt, nullus fortaſſe eſt, qui de puncto illo verba non fecerit, ex quo ſi grave ſuſpendas, omnia quieſcunt in æquilibrio. Atque hujuſmodi punctum ita conſtans eſſe compertum eſt, ut non mutetur, quacumque ratione circumvoluto corpore, dummodo ejus partes eumdem reſpective ſitum retineant.

Verum quidquid tradiderunt, illi dumtaxat hypotheſi aptavere, in qua concipiuntur partium gravitates directiones habere parallelas: quæ hypotheſis quamquam in iis, quæ uſui hominum, & commodis ſerviunt, unice adhibenda eſt; tamen pleræque aliæ hypotheſes a philoſophis jamdiu conſideratæ ſunt, & difficillimis phænomenis explicandis accommodatæ. Quamobrem operæ pretium duximus, pulcherrimam de æquilibrii centro Theoriam promovere, & ad illas etiam hypotheſes transferre, in quibus directiones potentiarum centrum petunt, quamcumque cum diſtantiis a centro potentiæ teneant proportionem. Quæ meditando nacti ſumus, ea in hunc modum diſponemus, ut primum de potentiis parallelis, deinde de illis, quæ ad centrum tendunt, verba faciamus. Quod ſpectat ad parallelas, eas habere centrum æquilibrii conſtans, firmiore fortaſſe, quam antea factum eſt, demonſtratione probabimus (b); tum methodos exponemus, quibus uſi ſunt ſcriptores ad

(a) *Edita fuit hæc diſquiſitio primum ſeparatim anno 1746, deinde in tertia parte ſecundi tomi Ac. Bon. anno 1747.*

(b) *Præſtitit hoc idem aliquot poſt annos Rogerius Boſcovichius vir doctiſſimus nempe anno 1751, adhibita diverſiſſima methodo.*

hujuſmodi centrum determinandum. De potentiis autem centrum petentibus quæremus, quænam hypotheſes careant, quænam prædítæ ſint centro æquilibrii conſtante; poſt, qua ratione methodi illæ, quibus inventum eſt centrum æquilibrii in potentiis parallelis, ad rem noſtram traduci poſſint, breviter exponemus.

Itaque ad rem propoſitam propius accedentes, præmittimus hujuſmodi notiſſimum

LEMMA.

INvenire potentiam æquivalentem duabus, quæ virgæ rigidæ applicantur.

Virgæ rigidæ AB (*Fig.* 1.) applicentur duæ potentiæ AM, BN, quibus æquivalens invenienda ſit. Directiones AM, BN producantur, donec concurrant in C, & transferantur potentiæ in punctum C, ſumptis in earum directionibus CS = BN, CR = AM: nihil enim intereſt, utrum potentiæ poſitæ ſint in locis AM, BN, aut in locis CR, CS. Hæ autem componantur facto parallelogrammo CSTR, cujus diagonalis CT æquivalentem repræſentabit. Hæc producatur, donec concurrat in K cum virga rigida AB. Perſpicuum eſt, potentiam CT translatam in KL, & applicatam virgæ rigidæ in K æquipollere duabus potentiis AM, BN.

Ubi advertendum eſt, determinandam eſſe non ſolum quantitatem potentiæ æquivalentis, ſed etiam punctum, ubi applicanda eſt: non enim æquivalet, niſi puncto K applicata.

Corollarium primum. Tres potentiæ KL, AM, BN ſunt inter ſe ut ſinus angulorum ACB, KCB, KCA. Quare diviſo angulo ACB ita, ut ſinus angulorum ACK, BCK ſint reciproce ut ipſæ potentiæ AM, BN, invenietur punctum K, cui potentia æquivalens eſt applicanda.

Corollarium alterum. Ex puncto K demiſſis in potentiarum directiones normalibus KP, KQ, ſumptoque tamquam ſinu toto KC, conſtat KP, KQ eſſe ſinus angulorum ACK, BCK: ſed potentiæ ex cor. 1. debent eſſe reciproce proportionales ſinibus angulorum ACK, BCK: Ergo reciproce ut perpendiculares KP, KQ.

Corollarium tertium. Si potentiæ AM, BN ad eamdem partem dirigantur, punctum K cadit inter puncta A, B. Verum ſi potentia AM ad unam partem ſolicitaret, BN ad oppoſitam, punctum K caderet extra puncta B, A, modo ad unam, modo ad alteram partem, ut circumſtantiæ requirunt.

Corollarium quartum. Ad æquilibrium habendum ſatis eſt effi-

efficere, ut potentia æquivalens ad oppoſitam plagam dirigatur. Quapropter ſi virga rigida ex puncto K ſuſtentetur, potentiæ AM, BN in æquilibrio quieſcent; & conſtabit quam potentiam exerceat fulcrum K, nimirum æqualem, & oppoſitam potentiæ æquivalenti KL.

Corollarium quintum. Si potentiarum directiones AM, BN concurrant in puncto C, etiam potentia ipſis æquivalens in eodem puncto concurrat, neceſſe eſt. Quare ſi duæ potentiæ AM, BN fuerint parallelæ, etiam æquivalens eiſdem erit parallela.

DE POTENTIIS PARALLELIS.

Ex præmiſſo Lemmate poſſem omnia invenire, quæ ad potentias parallelas pertinent: ſatis enim eſſet ſupponere, eas eſſe potentias parallelas, quæ ad angulum infinite acutum in puncto infinite diſtante conveniunt. Ex qua ſuppoſitione liceret e veſtigio colligere, diſtantias punctorum A, B a puncto K eſſe in ratione reciproca potentiarum, & potentiam æquivalentem KL eſſe æqualem ſummæ potentiarum AM, BN, ſi hæ ad eamdem partem dirigantur; ſi vero ad oppoſitas, earumdem differentiæ. Quæ res ſtatim cuique patebit, qui infinitorum, & infinite parvorum Theoriam non ignoret. Tamen aliam placet moliri demonſtrationem longiorem quidem, ſed non inelegantem, & quæ in infinitorum Theoriam nequaquam ingreditur.

Ad demonſtrationem adornandam præter præmiſſum Lemma indigeo dumtaxat axiomate, quod maxime ſimplex eſt, atque perſpicuum. Illud autem eſt hujuſmodi. Si duabus, aut pluribus potentiis addantur duæ, quæ æquales ſint, & contrariæ, eadem prorſus erit potentia æquivalens.

Virgæ rigidæ AB (*Fig.* 2) applicentur potentiæ parallelæ AM, BN, quibus æquivalens invenienda eſt. Dividatur linea AB bifariam in D: & quoniam duæ potentiæ æquales, & contrariæ non immutant æquipollentem, addantur duæ potentiæ AD, BD ita, ut invenienda jam ſit æquipollens quatuor potentiis AM, AD, BN, BD. Primæ duæ componantur facto parallelogrammo AMFD, & inveniatur æquivalens AF. Eodem modo facto parallelogrammo BNGD inveniatur æquivalens duabus BD, BN nempe BG. Hiſce æquivalentibus ſubſtitutis invenienda jam erit potentia æquivalens duabus AF, BG. Producatur BG, donec concurrat cum AF in C, factiſque RC = AF, SC = BG, completoque parallelogrammo CRTS, ducatur diagonalis TC, quæ erit potentia æquivalens potentiis AM, BN applicata in puncto K.

Jam vero ajo primo, potentiam æquipollentem T C eſſe parallelam potentiis A M, B N. Ex C ducatur C O parallela A B. Propter triangula ſimilia A D F, C O F erit A F : C F : : A D : C O. Item propter ſimilitudinem triangulorum B D G, G O C erit B G : G C : : B D : C O : atqui, quum ſit A D = B D, eſt A D : C O : : B D : C O : igitur per æqualitatem rationum A F : C F : : B G : C G ſive permutando A F : B G, aut R C : R T : : C F : C G : Ergo duo triangula T R C, G C F, quæ habent angulos T R C, G C F æquales, & circa hoſce angulos latera proportionalia, ſunt ſimilia: Igitur angulus R C T = C F G : Ergo T C eſt parallela D F, ſive potentiis A M, B N. Q. E. D.

Ajo deinde, potentiam æquivalentem T C fore æqualem potentiis A M, B N. Ex punctis R, S ducantur R P, S Q parallelæ A B. Duo triangula A F D, R C P non ſolum ſunt ſimilia, ſed etiam æqualia propter æqualitatem laterum A F, R C : Ergo C P = F D = A M. Eodem modo triangula G B D, C S Q propter æqualitatem laterum B G, S C non ſolum ſimilia ſunt, ſed etiam æqualia : Ergo C Q = G D = B N, ſed C Q = T P : Ergo T P = B N : Ergo duæ ſimul C P + T P = T C = A M + B N. Q. E. D.

Si potentiæ A M, B N ad oppoſitas plagas traherent, tunc potentia æquivalens T C differentiæ potentiarum A M, A N æqualis inveniretur.

Ajo poſtremo, potentias A M, B N eſſe in ratione reciproca diſtantiarum A K, B K. Namque D F, ſeu A M : K C : : A D : A K. Item K C : D G, ſeu B N : : B K : B D, ſeu A D. Ergo per rationem ex æquo perturbatam A M : B N : : B K : A K. Q. E. D. (a)

Si

(a) *Alia methodo nihil minus eleganti* (Fig. 7), *& breviori fortaſſe poteſt hæc propoſitio probari. Virgæ rigidæ* A B *applicatæ ſint potentiæ parallelæ* A M, B N, *quarum æquivalens eſt determinanda. Divide* A M, B N *bifariam in* C, D, *atque per hæc puncta parallelas* A B *duc* E G, I F, *quæ & inter ſe ſint æquales, & bifariam dividantur in punctis* C, D. *Claudantur parallelogramma* A E M G, B I N F, *quorum diagonales ſunt* A M, B N. *Conſtat potentiæ* A M *æquivalere duas* A E, A G, *& potentiæ* B N *æquivalere duas* B I, B F : *Igitur ſi inveniatur æquipollens quatuor* A E, B F, A G, B I, *eadem erit æquipollens duabus* A M, B N.

Producantur E A, F B *donec concurrant in* H, *ex quo puncto parallela potentiis* A M, B N *agatur* H K *ſecans* A B *in* K : *Ajo rectam* A B *in puncto* K *dividi in ratione reciproca potentiarum* A M, B N. *Namque ob ſimilitudinem triangulorum valent duæ proportiones* A K :

Si AM, BN ad plagas contrarias ſolicitarent, eadem proportio omnino valeret, ſed punctum K caderet poſt puncta B, A ad partem majoris potentiæ AM.

Poſt hanc demonſtrationem nemini obſcurum eſſe poteſt, & circa punctum K dividens lineam AB in ratione potentiarum reciproca parallelas potentias in æquilibrio manere, & eaſdem jure optimo collectas intelligi poſſe in eodem puncto K; quod nihil aliud eſt, quam pro duabus potentiis æquivalentem ſubſtituere ipſis æqualem. Quæ duæ proprietates latiſſime patent, & conveniunt potentiis, quemcumque ipſæ angulum cum linea AB efficiant, dummodo maneant parallelæ, & eiſdem lineæ AB punctis applicatæ.

Quod de duabus potentiis, idem de tribus, de quatuor &c., immo de infinitis cuicumque corpori, ſuperficiei, aut lineæ applicatis hac progreſſione demonſtratur. Namque ſint plures potentiæ A, B, D &c. (*Fig. 3.*) parallelæ applicatæ cuicumque maſſæ in pun-

HK : : EC : CA, HK : BK : : BD : DF: *Ergo quum* EC *per conſtruct. æquet* DF, *per rationem ex æquo perturbatam fiet* AK : BK : : BD : AC, *ſeu* : : BN : AM.

Abſcinde HS = AE, *&* HT = BF, *&* *duc* SP, TQ *parallelas* AB, *manifeſtum eſt, eſſe* SP = EC, TQ = DF: *Ergo* SP = TQ. *Produc* HQ *in* R, *ut* PR = HQ, *&* *junge* SR, TR. *Perſpicuum eſt,* SR *fore æqualem, &* *parallelam* HT: *Ergo* HSRT *erit parallelogrammum: Igitur duabus potentiis* HS, HT, *ſive* AE, BF *æquivalet potentia* HR: *ſed* HR = AC + BD. *Namque* HP = AC, *&* PR = HQ = BD: *Ergo duabus potentiis* AE, BF *æquivalet potentia* HR, *quæ eſt &* *parallela potentiis* AM, BN, *&* *æqualis earum ſemiſummæ, &* *dividit* AB *in ratione reciproca potentiarum earumdem.*

Simili methodo productis AG, BI, *donec concurrant in* L, *&* *ducta* LK *parallela* AM, BN *oſtendam punctum* K *dividere* AB *in ratione reciproca potentiarum* AM, BN. *Quare punctum* K *idem erit ac prius, &* HK, LK *in directum jacebunt. Tum eodem inſtituto ratiocinio palam faciam, duabus potentiis* AG, BI *æquivalere potentiam parallelam potentiis* AM, BN, *æqualem earum ſemiſummæ, applicandam in puncto dividente* AB *in ratione reciproca potentiarum earumdem; Ergo potentia æquivalens quatuor* AE, AG, BF, BI, *ſeu duabus* AM, BN *erit hiſce* AM, BN *parallela, æqualis earum ſummæ, &* *applicanda in puncto* K *dividente* AB *in ratione reciproca earumdem potentiarum.* Q. E. D.

punctis A, B, D. Jungatur AB, quæ dividatur in K in ratione reciproca potentiarum A, B: demonſtratum eſt potentias circa punctum K æquilibrium ubique facere, & in eodem puncto collectas intelligi poſſe. Intelligantur itaque in puncto K collectæ, & jungatur KD, quæ dividatur in H in ratione reciproca A + B : D: patet circa punctum H potentias eſſe ſemper in æquilibrio, & in eodem collectas intelligi poſſe. Quæ ratiocinatio quum ad quotquot volueris potentias etiam infinitas extendi poſſit, palam eſt potentias parallelas ejuſmodi centrum habere, circa quod non ſolum in æquilibrio maneant, ſed etiam in eodem colligi poſſint, aut pro ipſis ſubſtitui una dumtaxat potentia ipſarum aggregato æqualis. Atque hoc punctum ſemper idem eſt, quacumque ratione maſſa convertatur, modo potentiæ maneant parallelæ, & applicatæ eiſdem maſſæ punctis in eiſdem ſemper reſpective diſtantiis: ut, ſi mota, & circumvoluta quocumque pacto maſſa, cujus partes eumdem reſpective ſitum retineant, ipſæ ſemper lineæ finienti perpendiculares exſiſterent.

Hæc ipſa eſt hypotheſis gravitatis corporum, quum eorum directiones parallelæ eſſe ſupponuntur; in qua hypotheſi ſingulis particulis corporis æqualibus potentiæ æquales, parallelæ, & perpendiculares horizonti applicantur. Igitur intra quæcumque corpora cujuſcumque figuræ punctum invariabile exſiſtit, circa quod corpora quomodocumque ſuſpenſa æquilibrata quieſcunt, & in quo omnium partium gravitas jure optimo intelligitur collecta: quod centrum gravitatis appellatur.

Poſtquam demonſtratum eſt, potentias parallelas etiam numero infinitas præditas eſſe centro æquilibrii conſtante, reliquum eſt, ut promiſſis ſatisfacientes methodos indicemus, quibus a doctiſſimis viris centrum idem eſt determinatum. Nemo unus non videt, rem expertem eſſe omnis difficultatis, ſi potentiæ ſint numero finitæ, & ſolummodo negotium faceſſere, ſi ſint numero infinitæ; ut ſi cuilibet puncto lineæ, aut ſuperficiei, aut corporis ſua potentia applicata fuerit. Duas methodos a Scriptoribus uſurpatas video; prima uſi ſunt Varignonius in Ac. Reg. 1714., Hermannus in Phoronomia, aliique bene multi. Alteram excogitavit, & in Ac. Reg. 1731. expoſuit doctiſſimus Clairaut vir in rebus geometricis eximius.

Quod pertinet ad primam. Sint quælibet potentiæ A, B, D &c. applicatæ cuicumque corpori, quæ potentiæ ſibi ipſis ſemper parallelæ remaneant ex. ca. perpendiculares horizonti: ajo fore, ut ducto quolibet plano, & ex punctis A, B, D ad illud demiſſis perpendicularibus AM, BN, DQ, item ex H communi gravitatis

centro

centro HO, valeat æqualitas $A.AM + B.BN + D.DQ = \overline{A+B+D}.HO$.

Accommodetur, & circumvolvatur corpus ſimul cum plano ita, ut potentiarum directiones ſint eidem normales. Tum jungatur AB, inventoque duarum potentiarum A, B æquilibrii centro K, normalis plano ducatur KP, & per punctum K ducatur RKS parallela MN ductæ in plano. Propter ſimilitudinem triangulorum RKA, SKB erit $KB : KA :: BS : AR$; ſed $A : B :: KB : KA$: Ergo $A : B :: BS : AR$: Igitur $A.AR = B.BS$: ſed A.AR eſt exceſſus rectanguli A.KP ſupra A.AM; & B.BS eſt exceſſus rectanguli B.BN ſupra B.KP: Ergo $A.AM : A.KP$ eſt arithmetice ſicut $B.KP : B.BN$: Ergo $A.AM + B.BN = \overline{A+B}.KP$.

Jungatur jam KD, quæ dividatur in H in ratione reciproca $\overline{A+B} : D$: demittatur HO normalis plano, & ducatur per punctum H recta THV parallela PQ ductæ in plano. Propter ſimilitudinem triangulorum KHT, DHV erit $HD : HK :: DV : KT$; ſed $\overline{A+B} : D :: HD : HK$: Igitur $\overline{A+B} : D :: DV : KT$: Ergo $\overline{A+B}.KT = D.DV$; ſed $\overline{A+B}.KT$ eſt exceſſus rectanguli $\overline{A+B}.KP$ ſupra $\overline{A+B}.HO$, & D.DV eſt exceſſus rectanguli D.HO ſupra D.DQ: Ergo $\overline{A+B}.KP : \overline{A+B}.HO$ eſt arithmetice ut $D.HO : D.DQ$: Ergo $\overline{A+B}.KP + D.DQ = \overline{A+B+D}.HO$; ſed ex prima parte $\overline{A+B}.KP = A.AM + B.BN$: Igitur $A.AM + B.BN + D.DQ = \overline{A+B+D}.HO$. Qui progreſſus quum ad infinitas etiam potentias extendi poſſit, conſequitur pro illis quoque propoſitionem æque valere (a).

Supervacaneum judico, advertere cum potentias ad plagam oppoſitam ſolicitantes, tum diſtantias cadentes ad alteram plani partem fore negativas, propterea ſigno — eſſe afficiendas. Jam vero vocentur ſingulæ potentiæ $= p$, earum ſumma $= Sp$, diſtantiæ ſingularum a plano dato $= x$, ſumma rectangulorum ex diſtantiis, & potentiis $= Spx$, diſtantia centri gravitatis a plano dato $= u$,

(a) *Progreſſum ſuperioris demonſtrationis penitus attendenti palam fiet, non eſſe neceſſe, ut lineæ* AM, BN *&c. ſint plano* MQ *perpendiculares, ſed ſatis eſſe, ut ſint parallelæ inter ſe. Quæ animadverſio ſæpe ad inveniendum gravitatis centrum affert utilitatem.*

$= u$, erit ſemper $Spx = u . Sp$: Ergo $u = \frac{Spx}{Sp}$. Q. E. I.

Methodum doctiſſimi Clairaut (*Fig.* 4) exponens, ut brevior ſim, paullo alia ratione utar ab ea, quam Auctor ſequutus eſt. Sint potentiæ quælibet parallelæ applicatæ lineæ, vel ſuperficiei, vel corpori, quas per AEB deſigno, quarum æquilibrii centrum ſit K; item aliæ ſimiles deſignatæ per EB*be*, quarum centrum æquilibrii conſtans ſit H; omnium autem centrum ſit k. Ab hiſce autem punctis ad quamlibet lineam datam demittantur normales KP, k*p*, HO: Perſpicuum eſt Kk : Hk : : EB*be* : AEB: Sed P*p* : O*p* : : Kk : Hk: Ergo P*p* : O*p* : : EB*be* : AEB.

Jam vero ſint ut ſupra potentiæ parallelæ AEB, quarum quæritur centrum æquilibrii conſtans, applicatæ cuicumque lineæ, ſuperficiei, aut corpori, cujus axis aliquis ſit AB. Augeatur hic infiniteſimo elemento B*b*, cui reſpondeant potentiæ EB*be*. Illarum centrum æquilibrii conſtans ſit K, iſtarum H; omnium autem ſit k: quæ tria puncta in eadem linea recta conſtituta ſunt. Ab hiſce punctis demittantur in axem perpendiculares KP, k*p*, HO. Potentiæ AEB vocentur $= Sp$; potentiæ EB*be*, quæ nihil aliud ſunt, quam illarum differentia $= p$, $AB = x$, $AP = u$, $Pp = du$. Ex paullo ante dictis conſtat fore AEB : EB*be* : : $OP = Bp = BP : Pp$, ſive in ſignis analyticis $Sp : p : : x - u : du$: Ergo $du . Sp = px - ux$, ſive $du . Sp + up = px$, & integrando $u . Sp = Spx$, ſive $u = \frac{Spx}{Sp}$: quemadmodum etiam per methodum primam inventum eſt. (a)

Dum invenitur $AP = u$, nihil aliud invenitur, quam diſtantia centri æquilibrii K, quod quæritur, a plano tranſeunte per punctum A, cui ſit rectus axis AB: ſed ſi hoc modo inveniatur diſtantia ejuſdem centri a tribus planis non parallelis, illud hac ratione determinabitur. Omitto caſus, in quibus methodus fieri brevior poteſt, neque formulas cuilibet hypotheſi applico: hæc enim obvia ſunt, & ubique a Scriptoribus indicata. (b)

DE

(a) *Ad hanc quoque demonſtrationem conficiendam ſufficit, ut* KP, k*p*, HO, EB, *eb ſint inter ſe parallelæ.*

(b) *Geometras monitos volo, me de potentiis parallelis loquentem eam unice hypotheſim in diſquiſitione ſpectaſſe, in qua potentiæ eædem ſemper manent, neque mutantur, mutata earum diſtantia a dato plano: quam hypotheſim duntaxat tractarunt ſcriptores, qui ante me floruerunt ad unum omnes. Sed quid vetat, quominus eas quoque potentias contemplemur, quæ cum diſtantia a dato plano tenent proportionem ali-*

DE POTENTIIS CENTRUM PETENTIBUS.

Antequam potentias ad centrum tendentes conſiderandas ſuſcipio, neceſſe eſt, ut ſolutum exhibeam hujuſmodi geometricum

PROBLEMA.

In baſi A B dati trianguli A B C (*Fig.* 8) dato puncto K, ducere rectam R K S ad latera terminatam ita, ut R K = S K.

Accipiatur K M = A K, & a puncto M agatur M S parallela lateri C A, quæ alterum latus C B ſecabit in S. Ducatur S K R; ajo hanc a puncto R diviſam eſſe bifariam.

Demonſt. Quoniam A R, M S parallelæ ſunt per conſtructionem, triangula R K A, S K M erunt ſimilia; ſed latera homologa A K, M K ex conſtructione æqualia ſunt: Igitur triangula R K A, S K M non ſolum ſimilia ſunt, ſed etiam æqualia: Ergo K R = K S. Q. E. D. (a)

quam vel directam, vel reciprocam. Non eſt difficile his quoque formulas accommodare, per quas æquilibrii centrum determinetur.

Potentia abſoluta, ideſt ejus valor in determinata aliqua diſtantia a plano dato vocetur $= p$, *diſtantia potentiæ a plano* $= z$, *functio diſtantiæ, cui proportionatur potentia* $= fz$; *diſtantia veſtigii potentiæ in plano quocunque a puncto dato* $= x$, *& diſtantia centri æquilibrii* $= u$: *formula hæc valebit* $u = \frac{Spx \cdot fz}{Sp \cdot fz}$: *valor autem potentiæ æquivalentis applicandæ in centro æquilibrii erit* $= Sp \cdot fz$.

Quare ut habeatur potentia abſoluta applicanda centro æquilibrii, vocata hujus diſtantia a plano dato $= t$, *fiat* $\frac{Sp \cdot fz}{ft}$, *hæc erit potentia abſoluta. Omnia conſtant ex illis, quæ explicata ſunt in diſquiſitione.*

(a) *In prima diſquiſitionis editione* (*Fig.* 5) *hæc legebatur problemati ſolutio. Ratione analytica utor, & factum ſuppono, quod quæritur; tum duco* R G, S F *parallelas* A B, *& concurrentes cum* C K *in punctis* G, F: *conſtat* R G = S F, *&* K G = K F. *Propter ſimilitudinem triangulorum erit* C F : C K :: F S : K B. *Item* C K : C G :: K A : R G = F S: *Ergo per rationem ex æquo perturbatam* C F : C G : A K : B K: *tum dividendo, & accipiendo conſe-*

Potentias tendentes ad centrum, quas modo cœpi conſiderare, pono creſcere, vel decreſcere, ut quæcumque functio diſtantiarum a centro, quam, ut generaliter exprimam, deſignabo littera f ita, ut f AC ſignificet functionem ex diſtantia AC, & conſtantibus utcumque compoſitam. Verum adverte, hanc non eſſe unicam rationem, ex qua coaleſcunt potentiæ, ſed aliam conſtantem eſſe, quam eædem potentiæ tenerent poſitæ in eiſdem a centro virium diſtantiis. Energiam, qua præditæ ſunt potentiæ poſitæ in determinata quadam a centro diſtantia, quæ pro lubitu accipi poteſt, indicabo nomine potentiarum abſolutarum. Itaque potentiæ erunt inter ſe in ratione compoſita potentiarum abſolutarum, & functionum quarumlibet diſtantiarum a centro. Hac definitione præmiſſa.

Virgæ rigidæ applicentur potentiæ abſolutæ (*Fig.* 1) A, B, quas eiſdem litteris deſigno; diſtantiæ autem a centro C ſint AC, BC: Ergo potentiæ erunt ut A. f AC : B. f. BC. Supponatur K eſſe punctum æquilibrii, ex quo in AC, BC demittantur normales KP, KQ, & ex centro virium C in AB pariter normalis demittatur CO. Ut æquilibrium intercedat, neceſſe eſt ſeſe habere A. f AC : B. f BC : : KQ : KP: ſed quum ſint ſimilia triangula KBQ, CBO erit KQ : CO : : KB : CB, & propter ſimilia triangula AOC, APK, CO : KP : : CA : AK: Ergo KQ : KP in ratione KB : CB compoſita CA : AK : : KB. CA : KA. CB. Igitur A. f AC : B. f BC : : KB. AC : KA. BC, ſive $\frac{A.fAC}{AC} : \frac{B.fBC}{BC}$: : KB : KA. Ut igitur habeatur punctum æquilibrii K, neceſſe eſt ut linea AB conjungens puncta, in quibus applicantur potentiæ, dividatur in ratione reciproca $\frac{A.fAC}{AC} : \frac{B.fBC}{BC}$. Ita-

quentium dimidia CF : FK : : AK : $\frac{BK - AK}{2}$, *ſive* CS : SB : : AK : $\frac{BK - AK}{2}$.

Quæ proportio hanc nobis non inelegantem conſtructionem ſuppeditat. Dividatur bifariam KB *in* P, *&* *accommodetur* MN = AK, *ut etiam ipſa a puncto* P *bifariam ſit diviſa. Jungatur* MC, *cui ex puncto* N *agatur parallela* NS. *Ex puncto* S *ducatur* SKR, *hæc ipſa erit linea, quæ quæritur. Omitto cauſſa brevitatis demonſtrationem ſyntheticam, quæ ex analyſi deſcendit.*

Verum hæc ſolutio in editione ſecunda mutata fuit, quia viſa eſt alteri multum ſimplicitate, atque elegantia concedere.

Itaque punctum æquilibrii K reſpectu potentiarum conſtans erit, atque invariatum, ſi invariata, & conſtans ſit prædicta ratio: quod contingere nequaquam poteſt niſi $\frac{fAC}{AC} = \frac{fBC}{BC}$.

Hoc autem in duplici dumtaxat hypotheſi locum habet: prima quum ubique $AC = BC$, ſeu quum partes finitæ additæ, vel detractæ lineis AC, BC illarum æqualitatem non deſtruunt; quod ſupponit eas eſſe infinitas, ſeu centrum C infinite diſtare; quæ hypotheſis cum ea coincidit, quæ potentiarum directiones ponit parallelas. Altera hypotheſis poſtulat, ut $AC : BC :: fAC : fBC$: quod idem eſt, ac dicere, quum potentiæ creſcunt in ratione diſtantiarum a centro. In cæteris autem hypotheſibus punctum K mutat poſitionem in linea AB, prout ejuſdem lineæ poſitio reſpectu centri mutatur.

Advertendum eſt, in hypotheſi potentiarum creſcentium ut diſtantiæ a centro, punctum K dividere lineam AB in ratione reciproca potentiarum abſolutarum. Quapropter ſi hæ eædem potentiæ abſolutæ concipiantur mutare directionem ſuam verſus centrum, & parallelas directiones accipere, idem centrum æquilibrii habebunt, atque hoc conſtans. Quare methodi illæ, quibus in hypotheſi virium parallelarum centrum æquilibrii invenimus, & huic noſtræ hypotheſi poſſunt eſſe adjumento. Quod conſectarium etiam ex dicendis lucem accipiet.

Nunc perpendendum eſt, (*Fig.* 5) utrum omnes potentiæ abſolutæ intelligi poſſint collectæ in puncto æquilibrii K, vel hoc conſtans ſit, vel ſecus; ſive, quod idem eſt, utrum potentia æquivalens duabus potentiis abſolutis A, B poſitis in A, B ſit æqualis eiſdem potentiis poſitis in puncto K. Per punctum K ducatur ex Lemmate linea SKR, ut pars SK ſit $= RK$. Producatur CK donec $KT = CK$, ducanturque RT, TS, & efformetur quadrilaterum RTSC, quod ſine dubio erit parallelogrammum: Nam, quum duo triangula RKT, SKC ſint ſimilia, & æqualia, RT, CS erunt parallelæ, & æquales.

Jam vero energiæ, quibus præditæ ſunt potentiæ abſolutæ A, B poſitæ in punctis A, B, erunt inter ſeſe ut $CR : CS$. Nam $CR : CA :: RG : AK$

$CA : CB :: CA : CB$

$CB : CS :: BK : FS = RG$: Ergo

$CR : CS$ in ratione $CA : CB$ compoſita $BK : AK$ $:: BK . CA : AK . CB$: ſed ex ſupra demonſtratis $BK . CA : AK . CB :: A . fAC : B . fBC$: Igitur

tur $CR : CS :: A . fAC : B . fBC$: ſive ut potentiæ, quibus in punctis A, B præditæ ſunt potentiæ abſolutæ A, B. Q. E. D.

Itaque diagonalis CT exprimet potentiam æquipollentem duabus potentiis abſolutis A, B poſitis in punctis A, B. Jam vero producta RG, donec concurrat cum CB in H, erit $CG : CF = TG :: GH : FS = RG$: Ergo componendo $CG : CT :: GH : RH :: KB : AB$: ſed quum ſit ex dictis $KB : KA :: \frac{A.fAC}{AC} : \frac{B.fBC}{BC}$ erit componendo $KB : AB :: \frac{A.fAC}{AC} : \frac{A.fAC}{AC} + \frac{B.fBC}{BC}$: Ergo $CG : CT :: \frac{A.fAC}{AC} : \frac{A.fAC}{AC} + \frac{B.fBC}{BC}$: ſed $RC : CG :: AC : KC$: Igitur $RC : CT$ in ratione compoſita $\frac{A.fAC}{AC} : \frac{A.fAC}{AC} + \frac{B.fBC}{BC}$; ſive $AC : KC$

$$RC : CT :: A . fAC : \frac{A.KC.fAC}{AC} + \frac{B.KC.fBC}{BC}.$$

His inventis voco P energiam potentiarum abſolutarum A, B poſitarum in K. Perſpicuum eſt fore $RC : P :: A . fAC : \overline{A+B} . fKC$. Igitur $CT : P :: \frac{A.KC.fAC}{AC} + \frac{B.KC.fBC}{BC} : \overline{A+B} . fKC$: Ergo potentia æquivalens duabus abſolutis A, B poſitis in A, B ad potentiam earumdem poſitarum in K eſt, ut $\frac{A.fAC}{AC} + \frac{B.fBC}{BC} : \frac{\overline{A+B}\, fKC}{KC}$.

Porro hæc non poteſt eſſe ratio æqualitatis, niſi aut $AC = BC = KC$, quod verum eſt in hypotheſi centri infinite diſtantis; aut $fAC = AC$, quod dat hypotheſim potentiarum creſcentium, ut diſtantiæ a centro. In ceteris hypotheſibus eſt ſemper ratio inæqualitatis. Quare ad gravitatem quod ſpectat, ſi duas haſce excipias, in nulla hypotheſi fieri poteſt, ut jure bono concipiatur collecta omnium partium gravitas in puncto æquilibrii; potentia enim æquivalens gravitatibus corporum A, B poſitorum in A, B non eſt æqualis gravitati eorumdem corporum poſitorum in K.

Hypotheſis autem potentiarum creſcentium, ut diſtantiæ a centro, quando duabus illis ornata eſt proprietatibus, quas demonſtravimus convenire potentiis parallelis, ſcilicet ut duæ potentiæ habeant centrum æquilibrii conſtans, & ut collectæ intelligi poſſint in eodem centro æquilibrii, in dubitationem cadere nullo pacto poteſt, quin adhibita eadem ſerie, qua uſi ſumus in potentiis

pa-

parallelis demonſtrari idem poſſit de tribus, quatuor &c. immo de infinitis potentiis. Qua de re omnia corpora gravia in hac hypotheſi centrum gravitatis obtinebunt, ex quo, ſi ſuſpendatur quacumque ratione corpus, æquilibrium ſervabit, & in quo omnium partium gravitatem licet collectam intelligere.

Reliquum eſt, ut methodos exhibeamus, quibus in hypotheſibus virium tendentium ad centrum, inveniri centrum æquilibrii poteſt. Duabus methodis in hypotheſi virium parallelarum uſi ſumus. Utraque tentanda eſt, & rei, qua de agimus, accommodanda. Demonſtravimus nuper, duabus potentiis abſolutis A, B (*Fig.* 6) poſitis in A, B ſive $A . fAC + B . fBC$ æquivalere potentiam $KC . \overline{\frac{A . fAC}{AC} + \frac{B . fBC}{BC}}$. Quare ſi quæratur potentia abſoluta K collocanda in puncto K efficiens idipſum, quod efficiunt potentiæ abſolutæ A, B poſitæ in punctis A, B debebit $K . fKC$ æquare potentiam æquivalentem potentiis A, B poſitis in A, B: Ergo $K . fKC = KC . \overline{\frac{A . fAC}{AC} + \frac{B . fBC}{BC}}$: Igitur $K = \frac{KC}{fKC} . \overline{\frac{A . fAC}{AC} + \frac{B . fBC}{BC}}$.

Addatur jam tertia potentia D, & H ſit centrum æquilibrii duarum potentiarum K, D, erunt ex prima parte potentiæ $K . fKC + D . fDC$ æquipollentes $HC . \overline{\frac{K . fKC}{KC} + \frac{D . fDC}{DC}}$. Pro $K . fKC$, & $\frac{K . fKC}{KC}$ eorum valores ſubſtituantur, & fient $KC . \overline{\frac{A . fAC}{AC} + \frac{B . fBC}{BC}} + D . fDC$ æquipollentes $HC . \overline{\frac{A\ fAC}{AC} + \frac{B\ fBC}{AC} + \frac{D . fDC}{DC}}$: atqui ex prima parte $KC . \overline{\frac{A . fAC}{AC} + \frac{B . fBC}{BC}}$ æquipollent $A . fAC + B . fBC$: Igitur $A . fAC + B . fBC + D . fDC$ æquivalent $HC . \overline{\frac{A . fAC}{AC} + \frac{B . fBC}{BC} + \frac{D . fDC}{DC}}$.

Hic autem progreſſus quum produci poſſit in infinitum, conſequitur etiam de infinitis potentiis propoſitionem valere. Quare ſi vocentur potentiæ abſolute $= p$, earum diſtantiæ a centro virium $= z$,

$= z$, diſtantia centri æquilibrii a centro virium $= t$, & per ſignum S denotetur ſumma; potentiis omnibus manentibus in loco quæque ſuo, quas deſigno per $Sp \cdot fz$ æquivalet potentia $t\,S\,\frac{pfz}{z}$, quæ debet intelligi applicata in centro æquilibrii. (a)

Si formulam aptemus hypotheſi, in qua potentiæ ſunt, ut diſtantiæ a centro, tunc $Sp.fz$ poſitis potentiis in ſuis reſpective locis æquivalet potentia $t\,Sp$. Quæ formula ſatis indicat illud, quod alia ratione deduximus: nimirum omnes potentias abſolutas ſitas in centro æquilibrii idem efficere, ac facerent poſitæ in ſuo quæque loco.

Ceterum neque in hac hypotheſi, neque in aliis per hanc methodum inveniri poteſt quantitas t, quæ eſt diſtantia centri æquilibrii a centro virium; non enim inter potentias $Sp.fz$, & $t\,S\,\frac{pfz}{z}$ datur æqualitas, ſed tantum æquipollentia. Quare niſi res ad æqualitatem redigatur fieri non poteſt, ut æquilibrii centrum reperiatur. Redigi autem poſſe ad æqualitatem hac ratione exiſtimo.

Ducatur per centrum C quælibet linea CM, ad quam ex punctis A, B, ubi duæ potentiæ applicatæ ſunt, demittantur normales AM, BN, item KP ex centro æquilibrii K. Quoniam eſt ex demonſtratis $BK : AK :: \frac{A.fAC}{AC} : \frac{B.fBC}{BC}$. Item $BK : AK :: NP : MP$ erit $NP : MP :: \frac{A.fAC}{AC} : \frac{B.fBC}{BC}$: Ergo $\frac{A.fAC}{AC} . MP = \frac{B.fBC}{BC} . NP$: Atqui $\frac{A.fAC}{AC} . MP$ eſt differentia rectang. $\frac{A.fAC}{AC} . MC$, & $\frac{A.fAC}{AC} . PC$; & $\frac{B.fBC}{BC} . NP$ eſt differentia rectang. $\frac{B.fBC}{BC} . PC$, & $\frac{B.fBC}{BC} . NC$: Igitur $\frac{A.fAC}{AC} . MC : \frac{A.fAC}{AC} . PC$ eſt arithmetice ut $\frac{B.fBC}{BC} . PC : \frac{B.fBC}{BC} . NC$: Ergo

A.fAC

(a) *Formula tradita exhibet quidem potentiam æquivalentem, quæ componitur tum ex potentia abſoluta, tum ex functione diſtantiæ a centro virium. Quod ſi quæras potentiam ipſam abſolutam, quæ poſita in centro æquilibrii ſit æquipollens reliquis potentiis in loco quæque ſuo, ſi eam voces y habebis* $y f t = t\,S\,\frac{p.fz}{z}$: *Ergo* $y = \frac{t}{ft}\,S\,\frac{p.fz}{z}$.

$\frac{A.fAC}{AC}.MC+\frac{B.fBC}{BC}.NC=PC.\overline{\frac{A.fAC}{AC}+\frac{B.fBC}{BC}}$.

Addatur tertia potentia D, & comparetur potentia abſoluta $K=\frac{KC}{fKC}.\overline{\frac{A.fAC}{AC}+\frac{B.fBC}{BC}}$ cum potentia D, quarum centrum æquilibrii ſit H. Ducantur HO, DQ normales rectæ CM: erit ex prima parte $\frac{K.fKC}{KC}.PC+\frac{D.fDC}{DC}.QC=OC.\overline{\frac{K.fKC}{KC}+\frac{D.fDC}{DC}}$ & pro $\frac{K.fKC}{KC}$ ejus valore ſubſtituto erit $\overline{\frac{A.fAC}{AC}+\frac{B.fBC}{BC}}.PC+\frac{D.fDC}{DC}.QC=OC.\overline{\frac{A.fAC}{AC}+\frac{B.fBC}{BC}+\frac{D.fDC}{DC}}$ ſive ex prima parte $\frac{A.fAC}{AC}.MC+\frac{B.fBC}{BC}.NC+\frac{D.fDC}{DC}.QC=OC.\overline{\frac{A.fAC}{AC}+\frac{B.fBC}{BC}+\frac{D.fDC}{DC}}$. (a)

Qui progreſſus quum in infinitum produci poſſit, conſequitur de omnibus potentiis veram eſſe propoſitionem. Quare retentis ſuperioribus denominationibus vocentur $MC=x$, intercepta inter normalem cadentem a centro æquilibrii, & centrum virium $=u$, erit $S\frac{px.fz}{z}=uS\frac{p.fz}{z}$ ſive $u=\frac{S\frac{px.fz}{z}}{S\frac{p.fz}{z}}$. Quæ formula prorſus valeret, etiamſi linea aſſumpta non tranſiret per centrum C. In qualibet enim parallela rectæ CM æquales partes abſcinderentur a perpendicularibus, ac in CM; immo initium x, & u, modo ſit unum idemque, in quolibet puncto aſſumi poteſt: quod breviter adnotaſſe ſufficiet.

Ad methodum Doctiſſimi Clairaut quod ſpectat, ita noſtræ hypotheſi accommodari poſſe videtur. Si fuerint, (*Fig.* 4) quot volueris potentiæ, quæ tendant ad centrum C, quarum centrum æquilibrii ſit K; item aliæ quarum centrum æquilibrii H; centrum autem omnium ſit k: quæ tria puncta in eadem linea recta ſita ſint, neceſſe eſt. Ex hiſce punctis in lineam poſitione datam AB demittantur normales KP, kp, HO. Quoniam ex demonſtratis potentia æquivalens omnibus potentiis, quarum centrum K, diviſa per diſtan-

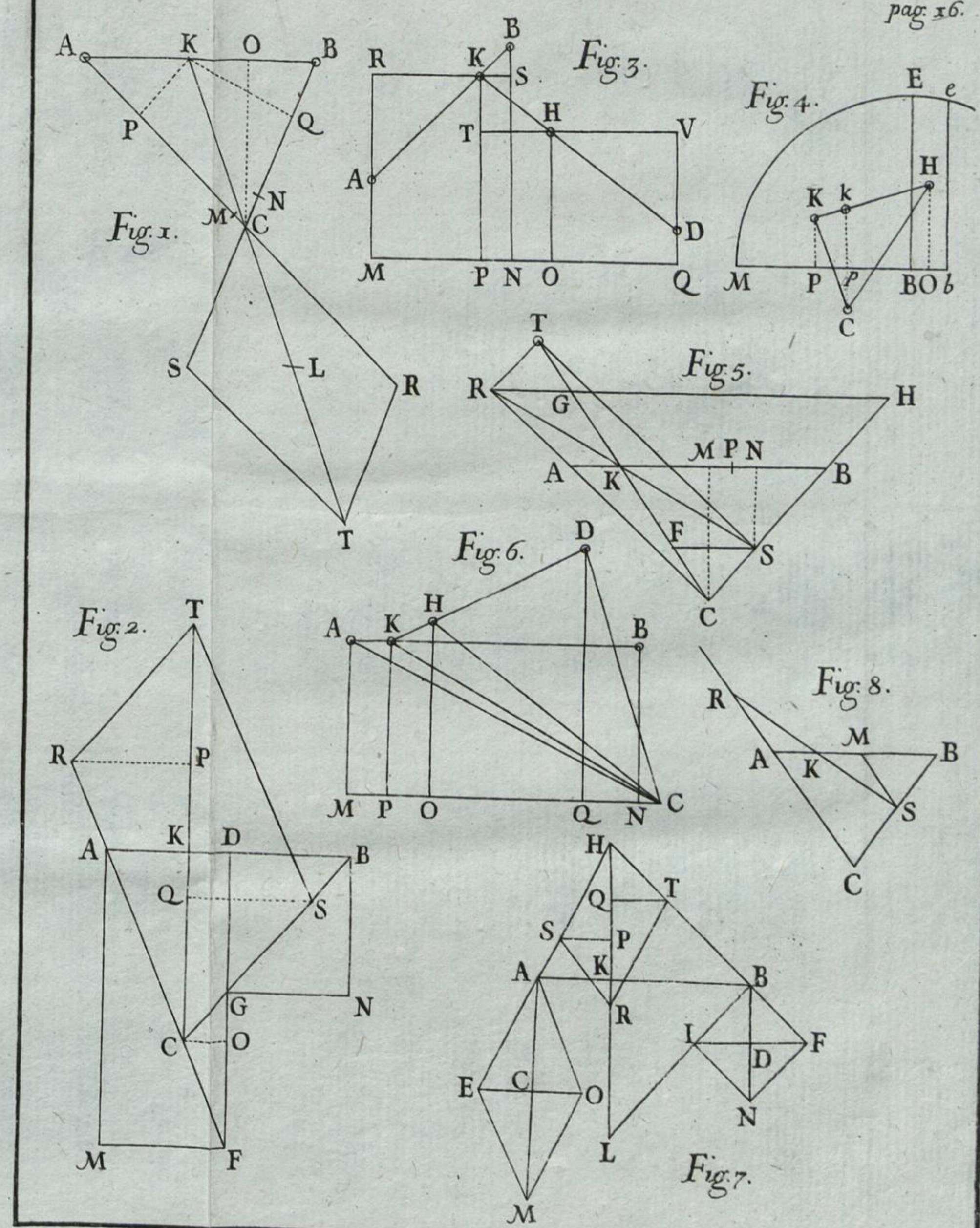
(a) *Ad hanc quoque demonſtrationem ſufficit, ut rectæ* AM, BN, KP *&c. ſint parallelæ inter ſe.*

diſtantiam KC eſt ad potentiam æquivalentem omnibus, quarum centrum H, diviſam per HC, ut $Hk : Kk$, erit etiam ut $Op : Pp$.

Jam vero ſint infinitæ potentiæ tendentes ad centrum C, quarum centrum æquilibrii K quæritur. Earum aliquis axis ſit AB. Repræſentetur ab AEB ſumma rectangulorum $\frac{pfz}{z}$ ita, ut $AEB = S\frac{p.fz}{z}$. Augeatur AB quantitate infiniteſima Bb, cui reſpondeat $BbeE$, quod proinde $= \frac{p.fz}{z}$. Hac additione facta, novæ etiam potentiæ adduntur, quarum centrum ſit H. Centrum autem omnium ex K tranſit in k. Vocetur $KC = t$, $HC = r$. Conſtat potentiam æquivalentem omnibus, quarum centrum $K = t\,S\frac{p.fz}{z}$, & omnibus quarum centrum $H = r.\frac{p.fz}{z}$: Ergo prima diviſa per t ad ſecundam diviſam per r, ut $Op : Pp$. Vocetur $AB = x$, $AP = u$, & $Pp = du$. Itaque erit $S\frac{p.fz}{z} : \frac{p\ fz}{z} :: x - u : du$, ſive $du.S\frac{p.fz}{z} + u.\frac{pfz}{z} = \frac{px.fz}{z}$: Igitur integrando $u\,S\frac{p.fz}{z} = S\frac{px.fz}{z}$; atque adeo $u = \frac{S\frac{px.fz}{z}}{S\frac{p.fz}{z}}$: quæ formula prorſus coincidit cum ea, quam per primam methodum ſupra invenimus (a).

Si utramque methodum ſedulo conſideres, non duas eſſe perſpicies, ſed unam eamdemque oppoſitis rationibus progredientem. Utraque enim refert potentias, earumque centra ad lineam poſitione datam; ſed prima ſyntheticam rationem iniens a duabus potentiis progreditur ad tres, deinde ad quatuor, atque ita ad infinitas: ſecunda analytica ratione utens ſupponit centrum, quod quæritur; illudque per methodum infinite parvorum, additis potentiis reſpectu reliquarum infiniteſimis, promovet: tum ad potentias duas æquipollentes tam potentiis datis, quam additis proprietatem aptat, qua reſpectu centri æquilibrii duæ potentiæ præditæ ſunt. Verum hæc methodus inutilis fuiſſet, niſi antea per diſtantiam centri æquilibrii a centro virium ſynthetica ratione potentiarum etiam infi-

(a) *Hic quoque ſervato linearum paralleliſmo non deficit demonſtratio.*


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.

infinitarum inventa fuiſſet potentia æquipollens centro æquilibrii applicanda.

Punctum illud, in quo normalis ducta a centro æquilibrii ſecat lineam poſitione datam, appellabo veſtigium centri æquilibrii in linea poſitione data. Si per veſtigium centri æquilibrii ducatur planum, cui linea poſitione data ſit perpendicularis, in hoc plano centrum æquilibrii inexſiſtit quidem certe. Quoniam autem formula ſatis indicat, in qualibet linea poſitione data inveniri poſſe veſtigium centri æquilibrii, aſſumantur tres lineæ non parallelæ, quarum omnium poſitio data ſit, in quibus omnibus veſtigia centri æquilibrii determinentur. Per hæc tria plana ducantur, quibus rectæ aſſumtæ normales ſint, punctum tribus planis commune idipſum eſt centrum æquilibrii, quod quæritur.

Si formula contrahatur ad hypotheſim potentiarum proportionalium diſtantiis a centro, multo fit ſimplicior, atque elegantior. Mutatur enim in hanc $u = \frac{Spx}{Sp}$: a qua, notandum eſt, diſtantias potentiarum a centro omnino abeſſe: quod indicio eſt, centrum æquilibrii eſſe conſtans, quamcumque poſitionem habeant potentiæ abſolutæ reſpectu centri virium, dummodo eandem ſervent poſitionem inter ſeſe. Nam finge animo, aut virgas rigidas, aut corpus, cui applicatæ ſunt potentiæ, ſimul cum linea poſitione data, in qua eſt veſtigium centri æquilibrii, quacumque ratione moveri, aut accedere, aut recedere a centro virium, aut circa aliquod punctum revolvi; profecto idem reſpectu potentiarum manebit centri æquilibrii veſtigium: Ergo etiam centrum æquilibrii: quam proprietatem alia ratione antea demonſtravimus.

Advertendum eſt etiam, formulas pertinentes ad hypotheſim virium parallelarum, & virium creſcentium ut diſtantiæ a centro eſſe unam, eandemque; ex quo colligitur, unum eſſe, idemque centrum æquilibrii in utraque hypotheſi; quam proprietatem ſupra item demonſtratam vidiſti.

Hæc quidem de centro æquilibrii inveſtiganda, atque demonſtranda mihi propoſui: ex quibus perſpicuum eſt, duas ſolummodo exſiſtere hypotheſes, in quibus non mutata potentiarum inter ſe poſitione centrum æquilibrii conſtans eſt, in eoque omnes potentiæ abſolutæ collectæ intelligi jure optimo poſſunt. In reliquis & centrum æquilibrii mutatur, & potentia omnibus æquivalens non eſt æqualis energiæ omnium potentiarum in centro æquilibrii poſitarum. Verum rationes indicatæ ſunt, & formulæ exhibitæ, per quas & potentia æquivalens, & centrum æquilibrii in hypotheſi quacumque determinatur.

OPUSCULUM SECUNDUM.

De Guldini Regula ad uſum centri gravitatis pertinente. Diſquiſitio Phyſico-Mathematica.

P. Paullus Guldinus Soc. Jeſu Sacerdos, cujus opus de centro gravitatis apud mathematicos ſemper in pretio fuit, libro ſecundo capite octavo regulam proponit, & ſequentibus capitibus pluribus exemplis illuſtrat, quæ deinceps ab ejus inventore regula Guldini appellata eſt. De hac agens Jacobus Hermannus in phoronomia pronunciat, fuiſſe antea a Pappo Alexandrino diſerte indicatam. Perlegi Pappum, neque quidquam inveni, quod aliquam haberet cum regula Guldini ſimilitudinem. Ut ut autem res ſeſe habeat, quum hujuſmodi regula pulcherrima mihi ſemper viſa fuerit, conſtitui de ea agere pro dignitate, ut plane omnibus pateat, quam poſſit rei geometricæ utilitatem afferre.

Regula a Guldino proponitur hiſce verbis: *Quantitas rotanda in viam rotationis ducta producit poteſtatem rotundam uno gradu altiorem poteſtate, ſive quantitate rotata*. Quandoquidem intelligi ſententia hæc non poteſt, niſi mente retineantur aliquot definitiones, quæ non paucis verbis, claris tamen ab Auctore antea præmiſſæ ſunt, iccirco aliis vocibus eandem exponam, quæ res geometricas, & analyticas callentibus obſcuræ eſſe non poterunt: Quantitas rotata multiplicata per viam centri gravitatis æqualis eſt quantitati ortæ ex rotatione.

Tametſi plures regulam hanc attigerint, atque demonſtraverint, inter quos honoris cauſſa nominandus eſt Jacobus Hermannus; tamen inveni neminem, qui eidem limites conſtitueret, ultra quos, ſi progrederetur, in paralogiſmum incideret. Non ſum neſcius, Guldinum ſemper ſua regula ita uſum eſſe, ut cautiones neceſſarias ne omitteret. Verum poſſet aliquis facili negotio ita regulam hanc accipere, ut ea abutens in errorem laberetur. Itaque hoc mihi primum propoſui in hac diſquiſitione, ut ſuos regulæ Guldini limites conſtituam: deinde ejus uſum amplificabo adhibita præſertim infinite parvorum theoria, quæ ab obitu Guldini patefacta eſt.

Ad

Ad rem autem ut propius accedam, memoria tenendum eſt, quod poſt alios a me demonſtratum eſt in opuſculo ſuperiori: nimirum ſi plures habeantur potentiæ parallelæ, ſumma rectangulorum, quæ fiunt ex ſingulis potentiis in ſuas diſtantias a plano dato, æqualis eſt rectangulo ex ſumma potentiarum in diſtantiam centri æquilibrii. Quod ſi potentiæ omnes æquales ſint, ſumma diſtantiarum cujuſcumque potentiæ a plano dato erit æqualis diſtantiæ centri æquilibrii toties ſumtæ, quotus eſt numerus potentiarum. Quum autem hæc ſit hypotheſis gravitatis, in qua æquales materiei partes æqualibus potentiis præditæ ſunt, de centro gravitatis ſolet pronunciari, quod ad centrum omnium potentiarum parallelarum ſpectat. Itaque ſumma diſtantiarum cujuslibet puncti quantitatis a plano dato æqualis eſt diſtantiæ centri gravitatis ſecundum numerum punctorum multiplicatæ. Hoc unice advertas velim, diſtantias illas tanquam negativas accipiendas eſſe, quæ ad alteram partem dati plani poſitæ ſunt.

His ſuppoſitis ſint plura puncta A, B, D (*Fig.* 1) æque gravia, quæ diſpoſita ſint in eadem AD, in qua eadem linea poſitum ſit centrum C, circa quod rotanda ſunt. Horum autem punctorum centrum gravitatis ſit K. Fiat rotatio circa C, & corpora A, B, D deſcribant ſimiles arcus Aa, Bb, Dd, centrum autem gravitatis K deſcribat arcum Kk: ajo, arcus Aa, Bb, Dd ſimul ſumtos æquare arcum Kk toties acceptum, quotus eſt punctorum numerus. Itaque ſi numerus hic vocetur $= N$ erit $Aa + Bb + Dd = N \, . \, Kk$.

Demonſtratio. Ex ſuperiore theoremate eſt $CA + CB + CD = N \, . \, CK$: atqui rectæ CA, CB, CD, CK ſunt proportionales arcubus Aa, Bb, Dd, Kk: Ergo hiſce proportionalibus in æquatione ſubſtitutis habebimus $Aa + Bb + Dd = N \, . \, Kk$. Q. E D.

Si aliquod ex punctis ex. ca. D (*Fig.* 2) jaceret ad alteram partem centri rotationis C tum arcus Dd non addendus, ſed deducendus eſſet ab arcubus Aa, Bb, ut æqualitas haberetur cum producto $N \, . \, Kk$: quod ſufficiat indicaviſſe.

Ex hiſce ſatis manifeſtum eſt, regulam Guldini in punctis valere, dummodo omnia poſita ſint in eadem linea recta cum centro rotationis. Verum conditione hac defficiente ſi quis regulam Guldini ad demonſtrandum vocaret, eadem abuteretur, & in paralogiſmum incideret. Quod hac ratione breviter demonſtrabo. Sit centrum rotationis C, (*Fig.* 3) puncta autem A, B quæ non ſint in eadem linea recta cum puncto C. Eorum centrum gravitatis ſit K. Jungantur CA, CB, CK. Ducatur normalis rectæ

CK linea PQ, in quam cadant perpendiculares AP, BQ. Ex theoremate præſuppoſito AP + BQ = N . CK: atqui CA > AP, CB > BQ: Ergo CA + CB > N . CK, ſed arcus deſcripti a punctis A, B, K ſunt proportionales radiis CA, CB, CK: Ergo arcus deſcripti a punctis A, B majores ſunt arcu deſcripto a K multiplicato per N. Q. E. D.

Ut regula Guldini in hoc quoque caſu utilitate non careat, methodus hæc adhibenda videtur. Ex centro C ducta qualibet CA, facto centro C intervallo CB deſcribatur arcus BD notans in linea CA punctum D. Intelligatur pro puncto B ſubſtitutum punctum D, quam ſubſtitutionem deinceps his, aut ſimilibus vocibus indicabo; projiciatur circulariter punctum B in D in lineam poſitione datam CA. Punctorum A, D inveniatur centrum gravitatis H. Ajo arcus deſcriptos a punctis A, B æquare arcum deſcriptum a puncto H multiplicatum per N.

Demonſtratio. Intelligatur fieri revolutio circa centrum C, & linea CA tranſire in Ca, CB autem in Cb, & puncta A, B, D, H deſcribere arcus Aa, Bb, Dd, Hb. Quoniam anguli BCA, bCa ſunt unus idemque angulus in diverſa loca translatus, erunt æquales: Igitur ablato communi bCA remanebit BCb æquali ACa: Ergo arcus Bb, Dd eodem radio præditi erunt æquales: Atqui ex demonſtratis Aa + Dd = N . Hb: Ergo Aa + Bb = N . Hb. Q. E. D.

Eſto itaque regula hæc pro punctis, quæ non ſunt ſita in eadem linea recta cum centro rotationis. Puncta omnia in lineam pro arbitrio ſumtam tranſeuntem per rotationis centrum circulariter projiciantur: punctorum, quæ oriuntur ex projectione centrum gravitatis reperiatur, & arcus ab hoc deſcriptus multiplicatus per numerum punctorum æquabit ſummam arcuum, qui a ſingulis punctis deſcribuntur. Ex hac conſtructione, quo pacto inveniendum ſit punctum H, ſeu ejus diſtantia a puncto C centro rotationis, obſcurum eſſe non poteſt. Nam ex præſuppoſito theoremate CA + CD = N . CH: atqui CD = CB: Igitur CA + CB = N . CH. Itaque qua ratione per diſtantias punctorum a recta PQ determinatur diſtantia centri gravitatis CK: ita per diſtantias punctorum a centro rotationis C determinatur quæſita CH: qua cognita dato angulo rotationis definitus eſt arcus, qui multiplicatus per N dat aggregatum eorum arcuum, qui a punctis A, B deſcribuntur.

Hoc unice adnotare oportet, duplici modo poſſe punctum B projici circulariter in lineam CA; primo modo projicitur ita, ut

puncta

puncta A, D jaceant ad eandem partem centri rotationis C ut in (*Fig.* 3); ſecundo modo, ut eadem puncta medium teneant centrum C ut in (*Fig.* 4). In primo caſu aggregatum arcuum, qui deſcribuntur a punctis A, B æquale eſt arcui deſcripto ab H ducto in N; in caſu altero differentia arcuum a punctis A, B deſcriptorum æquabit arcum deſcriptum ab H multiplicatum per N. Quapropter ſi quæras ſummam arcuum, projice puncta ad eandem partem centri rotationis, ſi quæras differentiam, ad diverſas partes centri rotationis puncta projiciantur.

Quæ dicta ſunt pro hypotheſi, quod rotatio conſiſtat in uno eodemque plano, & circa punctum peragatur, transferenda ſunt ad hypotheſim, quod rotatio peragatur circa axem, & puncta minime poſita ſint in eodem plano, cui rectus ſit axis rotationis. Etenim vel puncta omnia jacent in uno eodemque plano tranſeunte per axem rotationis, & tum regula Guldini locum habet, quod ſcilicet ſumma arcuum a punctis ſingulis deſcriptorum æqualis eſt arcui deſcripto ab eorum centro gravitatis ducto in punctorum numerum. Vel puncta omnia ſita non ſunt in eodem plano tranſeunte per axem rotationis; & tum concipiendum eſt planum aliquod per axem rotationis tranſiens, atque in hoc projicienda ſunt puncta omnia circulariter: punctorum, quæ per hanc projectionem notantur in plano, inveniendum centrum gravitatis, cujus via per numerum punctorum multiplicata exhibebit arcus ſimul ſumptos a ſingulis punctis deſcriptos. Quoniam in his valent non minus eædem demonſtrationes, quam eædem animadverſiones, quæ ſupra factæ ſunt, legentibus faſtidio eſſet eaſdem repetere.

A punctis ad lineas gradus faciendus eſt. Sit linea recta BA (*Fig.* 5) rotanda circa centrum C, per quod producta tranſit; ejus centrum gravitatis ſit K, quod illam bifariam ſecat: ajo zonam ABba genitam in rotatione æqualem eſſe rectangulo ex eadem linea BA in arcum Kk deſcriptum a centro gravitatis K.

Demonſtratio. Ex theoremate præſuppoſito ſi vocetur CB $= a$. BM $= x$, MN $= dx$, arcus Mm $= y$, erit $S\overline{a+x}\,.\,dx =$ CK, $S dx$: atqui omnibus diſtantiis CM $= a + x$ proportione reſpondent arcus Mm, ſicuti diſtantiæ CK arcus Kk: Ergo proportionalibus ſubſtitutis habebimus $S y dx =$ Kk . $S dx$, poſitoque $x =$ BA. $S y dx =$ Kk . AB; in eadem autem hypotheſi $S y dx$ æquat zonam ABba: Ergo zona ABba = Kk . AB. Q. E. D.

Si punctum B caderet in centrum rotationis C, zona tranſiret in ſectorem circularem, cujus area propterea æquaret rectangulum

lum ex radio ſectoris in analogum arcum circuli habentis pro radio dimidium radii ſectoris.

Si vero punctum B caderet ad partem oppoſitam, (*Fig.* 6) & linea A B divideretur a centro C: tum ſector deſcriptus a C A demto ſectore deſcripto a C B æqualis eſſet toti A B multiplicatæ in viam centri gravitatis. Etenim quum pars C B moveatur per directionem oppoſitam directioni C A, ſector qui oritur ex C B, tanquam negativus habendus eſt. Fallitur itaque doctiſſimus Guldinus, qui concipiens a linea C A integram revolutionem confici circa punctum C, ait, intelligendam eſſe compenetrationem circuli deſcripti a recta C B cum æquali parte circuli deſcripti a C A, ut regulæ veritas ne deficiat. Quod adeo eſt alienum a veritate, ut potius auferendus ſit circulus radii B C a circulo radii C A, ut quantitas proveniat æqualis rectæ B A in circumferentiam circuli deſcriptam a centro K.

Hoc quamquam evidens eſt per ſeſe ex dictis; tamen placet idipſum duabus animadverſionibus confirmare. Si linea C B = C A, punctum K caderet in ipſo rotationis centro C: Ergo nulla eſſet via centri gravitatis, atque adeo nullum rectangulum ex B A in viam ſui centri gravitatis. Igitur quantitas huic æquanda nulla ſit oportet: atqui ſemper erit aliqua, niſi ſuperficies deſcripta a B C deducenda ſit a ſuperficie deſcripta a C A: Igitur ad uſum regulæ P. Guldini neceſſe eſt, non addere, ſed demere circularem ſuperficiem productam a C B ab illa, quæ oritur a C A.

Præterea concipiatur linea C A (*Fig.* 7) rotanda circa punctum C, in qua accipiantur æquales partes C B, C *b*. Dividatur B A bifariam in K, & *b* A in k, & puncta K, k erunt centra gravitatum linearum B A, *b* A. Quando C B eſt dimidium *b* B, & B K eſt dimidium B A, erit tota C K dimidium totius *b* A, ſed ejuſdem dimidium eſt A k: Ergo C K = A k, & ablata communi K k remanebit C k = A K. Quare non minus B A erit dupla C k, quam *b* B dupla K k: Ergo erit B A : *b* B : : C k : k K, & componendo B A : *b* A : : C k : C K: atqui C k, C K ſunt ut arcus in rotatione circa C deſcripti a punctis k, K: Igitur B A, *b* A ſunt reciproce ut arcus deſcripti ab earum centris gravitatis. Itaque figuræ genitæ ab iſtis lineis B A, *b* A rotandis circa C, quæ æquandæ ſunt rectangulis ortis ex earundem multiplicatione in vias ſui centri gravitatis, æquales ſint oportet: quod fieri omnino non poteſt, niſi ſector genitus a C *b* detrahatur a ſectore genito a C A. Quare ad veritatem regulæ P. Guldini non neceſſe eſt, conſiderare tamquam compenetratos

cir-

circulos radiorum C A, C *b*, ſed potius alterum ab altero demere. Quod mihi propoſueram demonſtrandum.

Hæc dicta ſint de lineis rotandis, quæ productæ, ſi opus eſt, tranſeunt per centrum rotationis. Nam ſi rotetur linea circa punctum, per quod non tranſit, regula Guldini incautos in paralogiſmum poſſet deducere. Verum per circularem projectionem res non difficulter abſolvetur eo ferme pacto, quo in punctis antea factum eſt. Itaque linea quælibet B A rotetur circa punctum C, (*Fig.* 8) per quod producta non tranſit, & in rotatione feratur ad ſitum *b a* ita, ut genita ſit ſuperficies *b* B A *a* clauſa a duobus arcubus circularibus B *b*, A *a*, quorum radii C B, C A, & a duabus rectis A B, *a b*. Ut hæc ſuperficies determinetur, ducatur quælibet C A, & facto centro in C intervallo C B deſcribatur arcus B D, ut linea B A circulariter projiciatur in D A. Lineæ hujus D A ortæ ex projectione inveniatur centrum gravitatis K, quod eam dividit bifariam. Intelligatur linea D A rotari ſimul cum B A circa centrum C. Dum linea B A pervenit in *b a*, recta D A fertur in *d a*, & ejus centrum gravitatis K deſcribit arcum circularem K k. Ajo itaque ſpatium B A *a b* per rotationem genitum a recta B A = D A . K k.

Demonſtratio. Triangulum mixtilineum B D A eſt prorſus æquale triangulo *b d a*, quia, ſi arcus *b d* ſuperponatur arcui B D, perfecte congruit: Ergo addito communi ſpatio D *b a* A fiet ſpatium B *b a* A æquale D *d a* A: atqui hoc, quum gignatur ex rotatione lineæ D A tranſeuntis per rotationis centrum C, eſt æquale D A. K k: Ergo etiam B *b a* A æquat rectangulum D A . K k. Q. E. D.

In circulari projectione facienda curatio habenda eſt, (*Fig.* 9) ne in errorem labamur. Etenim ſæpe in uno eodemque loco duæ lineæ tanquam compenetratæ conſiderandæ ſunt. Quando autem hoc contingat videamus. Sit linea A B rotanda circa punctum C, ex quo puncto C demittatur in illam perpendicularis C E, quo intervallo deſcribatur circulus E F *e*. Ducta linea C A, in hanc prius projiciatur recta A E, & habebimus lineam A F. Tum facto centro in C intervallo C B deſcribatur arcus B D, & linea B E circulariter projiciatur in F D. Manifeſtum eſt, rectam F D naſci ex circulari projectione tam lineæ A E, quam lineæ B E: quare in loco F D duæ lineæ tanquam compenetratæ intelligendæ ſunt; atque in hac hypotheſi linearum, quæ oriuntur ex projectione, centrum gravitatis eſt inveniendum.

Verum hoc ſedulo inquirendum videtur, quodnam ſpatium oriatur ex rotatione lineæ A B. Tranſeat linea rotans A B in ſitum

tum *a b* deſcribentibus punctis A, E, B arcus ſimiles A *a*, E *e*, B *b*. Pars A E deſcribet ſpatium A E *e a* interceptum inter arcus ſimiles A *a*, E *e*, & inter rectas æquales A E, *a e*: pars autem B E deſcribit ſpatium B E *e b* interceptum inter arcus ſimiles B *b*, E *e*, & inter rectas æquales B E, *b e*: quæ duo ſpatia habent communem partem E O *b e* clauſam a duabus rectis æqualibus E O, *e b*, & a duobus arcubus O *b*, E *e*. Quare in eo loco duplex ſpatium compenetratum debet intelligi, ut ſpatium genitum a linea B A æquale ſit rectangulo ex A F + F D in viam centri gravitatis harum linearum.

Arcus B *b* protrahatur, donec ſecet *a b* in *o*: manifeſtum eſt ſegmentum B E O = ſegmento *b e o*: Ergo addito communi ſpatio E O *b e* fiet zona B E *e b* = E O *o e*: ſed prima deſcribitur a B E, ſecunda ab O E: Ergo zonæ quæ deſcribuntur a lineis æqualibus E O, E B quæ ſitæ ſunt ad diverſas perpendicularis partes, æquales inveniuntur. Quare ſi ſeparatim invenias zonas primum deſcriptas ab A E, deinde ab O E, habebis integram zonam deſcriptam ab A B. Hæc autem animadverſio ſæpe erit utilitati.

Juvabit etiam non raro uti projectione ad alteram partem puncti C. Sit projicienda circulariter recta A B, (*Fig.* 10.) ut zona ab ea rotando deſcripta determinari poſſit. Addatur rectæ A B linea quævis B E. Facto centro in C intervallo C E deſcribatur ſemicirculus F E H, atque hac ratione linea E A erit circulariter projecta in A F. Tum facto centro in C intervallo C B deſcribatur arcus B D, atque hoc modo adjecta linea B E circulariter projicitur in D H ad alteram partem centri rotationis C. Duarum linearum ſit centrum gravitatis K: ajo, zonam deſcriptam a B A fore æqualem rectangulo ex A F + H D in viam K. Nam zona deſcripta a B A eſt æqualis zonæ deſcriptæ ab A E dempta zona deſcripta a B E: ſed prima æquat zonam deſcriptam a F A, altera zonam deſcriptam a D H: Ergo zona deſcripta a B A eſt æqualis differentiæ zonarum, quæ deſcribuntur a lineis F A, D H: ſed hæc æquat A F + H D in viam K: Ergo zona deſcripta a B A eſt æqualis A F + H D in viam centri K. Q. E. D.

Quæ dicta ſunt de lineis rectis, valent etiam de curvis. Etenim ſi linea B A curva eſſet, eædem omnino demonſtrationes, atque animadverſiones locum haberent.

Paucis de uſu regulæ dicam amplificato per theoriam infinite parvorum. Res enim quum ſit per ſeſe facilis ſatis illuſtrabitur exemplo earum curvarum, quæ per modum conchoidis nicomedeæ generantur. Sit quælibet curva A E, (*Fig.* 11) & extra illam poſi-

poſitus polus C, per quem tranſeat linea CDB, quæ ſecat curvam datam in A, & habeat partes AB, AD æquales. Ita hæc linea moveatur, ut punctum A ſemper permaneat in data curva AE, & ipſa ſemper tranſeat per polum C. A punctis B, D deſcribentur curvæ BFf, DGg. Fingamus eam perveniſſe in ſitum CGF: promoveatur in ſitum infinite proximum Cgf, & centro C deſcribantur arcus Fm, En, Go.

Vocentur CD $= b$, DA $=$ AB $=$ GE $=$ EF $= a$, CE $= y$, En $= dx$. Notum eſt ſpatium FfgG adæquare zonam circularem FmoG: quæ cum gignatur ex rotatione lineæ FG circa centrum C, cujus centrum gravitatis eſt E deſcribens arcum En, erit $= 2adx$: Ergo ſpatium FfgG $= 2adx$.

Dividatur EF bifariam in P, & centro C deſcribatur arcus Pp, qui cum ſit $: dx :: y + \frac{a}{2} : y$ erit $= dx + \frac{\frac{a}{2}dx}{y}$: Ergo zona F$mn$E, adeoque etiam ſpatium FfeE $= adx + \frac{\frac{a^2}{2}dx}{y}$.

Similiter diviſa GE in Q, deſcriptoque arcu Qq invenietur ſpatium EegG $= adx - \frac{\frac{a^2}{2}dx}{y}$.

Quapropter differentia ſpatiorum FfeE, EegG erit $= \frac{a^2dx}{y}$. Quum autem ex æquatione curvæ AE detur dx per y, dy, conſtat omnia quæſita ſpatia invenire poſſe.

Ponamus AE eſſe lineam rectam, & a puncto B gigni conchoidem nicomedeam ſuperiorem, a puncto D inferiorem. Vocetur AE $= t$: Ergo CE $= y = \sqrt{\overline{a+b}^2 + tt}$, & E$e$ $= dt$. Ex ſimilitudine triangulorum Een, CeA, ſive CEA erit En : Ee :: CA : CE ſive analytice $dx : dt :: a+b : \sqrt{\overline{a+b}^2 + tt}$: Ergo $dx = \frac{\overline{a+b}.dt}{\sqrt{\overline{a+b}^2 + tt}}$. Itaque ſubſtitutis hiſce valoribus habebimus ſpatium FfgG $= 2adx = \frac{2a.\overline{a+b}.dt}{\sqrt{\overline{a+b}^2 + tt}} = \frac{4a}{a+b} \times \frac{\overline{a+b}^2 dt}{2\sqrt{\overline{a+b}^2 + tt}}$: quod pertinet ad quadraturam hyperbolæ.

 Cen-

Centro A, & ſemiaxe CA deſcribatur hyperbola æquilatera CR, cui ex puncto E ordinetur ER, ducaturque AR: notum eſt ſectorem ACR $= \int \frac{\overline{a+b}^2\, dt}{2\sqrt{\overline{a+b}^2 + t^2}}$: Ergo ſpatium BFGD ad ſectorem ACR erit ut $4a : a+b$. Q. E. I.

Differentia inter duo ſpatia FfeE, EegG inventa eſt $= \frac{aadx}{y}$: Ergo ſubſtitutis valoribus erit $= \frac{a^2 \cdot \overline{a+b} \cdot dt}{\overline{a+b}^2 + tt} = \frac{a^3}{a+b}$ $\frac{\overline{a+b}^2\, dt}{\overline{a+b}^2 + tt}$. Quum autem $\int \frac{\overline{a+b}^2 \cdot dt}{\overline{a+b}^2 + t^2}$ ſit arcus circularis, cujus radius CA $= a+b$, tangens AE $= t$, conſtat tertiam proportionalem poſt CA, DA multiplicata per arcum, cujus radius CA, & tangens AE exhibere differentiam ſpatiorum BFEA, AEGD. Quum autem horum ſpatiorum ſumma detur ex hyperbolæ quadratura, differentia ex quadratura circuli, apparet, quodlibet ex illis ſpatiis tum a circuli, tum ab hyperbolæ quadratura pendere. Sed de his ſatis.

Conſideravimus adhuc, omnia puncta lineæ rotatæ jacere in uno eodemque plano, cui axis rotationis normalis ſit. Nunc ad eos caſus progrediamur, in quibus pars aliqua figuræ extra prædictum planum poſita eſt. Ac primo ſupponamus, figuram genitricem jacere in uno eodemque plano tranſeunte per axem rotationis: ajo, figuram genitricem multiplicatam per viam centri gravitatis exhibere productum æquale figuræ genitæ. Figura rotata vel eſt linea generans ſuperficiem, vel eſt ſuperficies generans ſolidum. Utrumque caſum breviter demonſtremus.

Quoad primum: axis rotationis ſit CDP, (*Fig.* 12) per quem tranſeat planum, in quo poſita ſit linea AB vel recta, vel curva, cujus centrum gravitatis ſit K. Ex hoc ducatur in axem perpendicularis KD. Ex quolibet puncto M ducatur pariter axi normalis MP, & ſumatur infinite parva MN. MP fiat $= x$, MN $= ds$. Ex theoremate præſuppoſito erit $Sxds =$ KD. Sds: atqui facta rotatione circa axem CP, arcus deſcripti ab M, qui dicantur $= y$, & arcus deſcriptus a K, qui dicatur $= k$ ſunt proportionales diſtantiis MP, KD. Ergo proportionalibus ſubſtitutis erit $Syds = k\,Sds = k$. AB facta $s =$ AB: atqui in hac hypotheſi $Syds$ eſt æqualis ſuperficiei genitæ ab AB: Ergo hæc ſuperficies eſt æqualis lineæ AB ductæ in arcum deſcriptum ab ejus centro gravitatis K. Q. E. D.

Sit

Sit nunc ſuperficies ea, quæ rotatur, figura, quæ intelligatur (*Fig.* 13) diviſa in ſua elementa R S V T per lineas parallelas axi rotationis C D. Diſtantia elementi R V ab axe vocetur $= x$, elementum $= ds$. Sit autem K centrum gravitatis figuræ rotatæ, & K D diſtantia. Erit ex theoremate præſuppoſito $S\,x\,ds = KD.S\,ds$ ſed x, & K D ſunt proportionales arcubus ſimul deſcriptis, qui dicantur y, k: Ergo proportionalibus ſubſtitutis fiet $S\,y\,ds = k\,S\,ds$ $= RVZ.k$: ſed in hac hypoteſi $S\,y\,ds$ eſt ſolidum genitum in rotatione: Ergo ſuperficies rotata in viam centri gravitatis eſt æqualis ſolido orto ex rotatione. Q. E. D.

Si pars figuræ rotatæ jaceat ad partem alteram axis rotationis, quæ figura ab hac gignitur, detrahenda eſt a reliqua, ut veritas a Guldini regula ne diſcedat: quemadmodum ſupra notatum eſt.

Quod ſi figura genitrix rotanda non jaceat in uno eodemque plano tranſeunte per axem rotationis, ut Guldini regula cum veritate conſentiat, projicienda eſt primum circulariter figura genitrix in planum tranſiens per axem rotationis, tum figuræ ex circulari projectione ortæ determinandum eſt centrum gravitatis, demum hæc figura orta ex projectione in viam ſui centri gravitatis multiplicanda, & habebimus productum æquale quantitati ortæ ex rotatione. Hujuſce propoſitionis omittitur demonſtratio, quia ſimilis eſt illi, qua ſupra uſi fuimus. Quæ autem ſupra factæ ſunt animadverſiones, eædem huc transferendæ ſunt.

Ad regulæ uſum accedo, in quo explicando non tam brevitatis, quam diligentiæ ratio mihi habenda eſt. Si figuræ rotantis, vel ſuperficies ſit vel linea, centrum gravitatis vel aliunde cognitum ſit, vel brevi calculo facile cognoſci poſſit, quod contingit in figuris rectilineis, in integro circulo, ellipſi, omnibuſque figuris conſtantibus quatuor partibus æqualibus, & ſimilibus, tum ſine ullo artificio regula in uſum traducenda eſt. Regula vero hæc ſatis docet, ſervata eadem diſtantia centri gravitatis ab axe rotationis æqualem ſemper oriri quantitatem, quomodocumque figura rotans conſtituatur, dummodo maneat in uno eodemque plano rotationis.

Quod ſi figura rotans habeat duas partes ſimiles & æquales, quæ a linea recta ſeparantur, ejus centrum gravitatis in hac recta linea poſitum eſt. Si hæc eadem linea axi rotationis parallela conſtituatur, non eſt neceſſe centrum gravitatis reperire, quia ubicumque poſitum ſit, ejus diſtantia ab axe rotationis erit eadem.

In hac tamen methodo quantitas figuræ rotandæ data eſſe ſupponitur: quare aut ipſa ſimplex maxime ſit oportet, aut ad ſimpliciores aliunde jam redacta. Quod ſi hoc faciendum eſſet, &

centrum gravitatis inveniendum, operationes iterandæ moleſtia non mediocri analyſtas afficerent. Quare ſatius erit in hoc caſu figuram rotandam in ſua elementa dividere, & quodlibet ex elementis in viam ejus centri gravitatis multiplicare; tum per methodum integralium ſummatoriam accipere, & figuræ genitæ quantitatem inveniemus.

Si ſermo ſit de lineis rotantibus, alia methodus præter hanc non videtur ſuppetere. Dividatur A B (*Fig.* 12) rotanda in ſua elementa M N. Ducantur M P, N Q normales axi rotationis. Vocetur $r : c$ ratio radii ad circumferentum; tum fiat $r : c :: \mathrm{MP} : \frac{c}{r} . \mathrm{MP}$, quæ multiplicetur per $\mathrm{MN} = ds$, & habebitur elementum ſuperficiei genitæ $\frac{c}{r} . \mathrm{MP} . ds$. Quum autem detur ex curvæ æquatione ds per M P, poterit integrando cognoſci genita ſuperficies.

Si vero ſermo ſit de ſuperficiebus, multis modis poterunt hæ intelligi diviſæ in ſua elementa. Si ſuperficies rotanda axem habeat parallelum axi rotationis, utile erit eam dividere in elementa per lineas eidem perpendiculares. Ita quum ſuperficies rotanda A B D (*Fig.* 14) habeat A D parallelum axi rotationis E C, dividatur in ſua elementa per R M, N S quæ productæ ſecent rotationis axem C E normaliter. Vocetur $\mathrm{EA} = b$, $\mathrm{AR} = x$, $\mathrm{RM} = y$. Centrum gravitatis elementi R N ſit K, cujus diſtantia ab axe rotationis E C erit $= b + \frac{y}{2}$. Igitur elementum ſolidi geniti $= \frac{c}{r} . \overline{b + \frac{y}{2}} . y\,dx$.

Quod ſi ſuperficies clauderetur non a B D parallela ordinatis, ſed vel a B G, vel a B F: tum ad habendum ſolidum genitum a $S\,\frac{c}{r} . \overline{b + \frac{y}{2}} . y\,dx$ facto $x = \mathrm{AD}$ vel detrahendum eſſet ſolidum genitum a triangulo B D G, vel addendum quod gignitur a triangulo B D F.

Præſtabit aliquando dividere ſuperficiem in elementa per lineas parallelas axi rotationis, ut in (*Fig.* 15): quo in caſu vocata $\mathrm{BE} = b$, $\mathrm{BS} = x$, $\mathrm{SN} = y$; centrum K diſtabit ab axe rotationis diſtantia $= b - x$: ergo elementum ſolidi geniti erit $= \frac{c}{r} . \overline{b - x} . y\,dx$. Alia artificia pro circumſtantiarum diverſitate adhiberi poterunt, quæ quando non ignota ſunt analyſtis, eorum induſtriæ relinquenda cenſeo.

Unum dumtaxat prætereundum non videtur, (*Fig.* 16) nimirum quum ſolidum quæritur, quod gignitur a ſuperficie curva,

quæ

quæ clauditur a tangentibus curvam. Sit curva qualibet A M B relata ad lineam C S, in quam deſinunt tangentes a ſingulis curvæ punctis diſcedentes, ut M R, quæritur ſolidum quod gignitur a ſuperficie, quæ clauditur ab A C, C R, parte curvæ, & ejus tangente. Ducantur infinite proximæ duæ tangentes M R, N S, & in puncto O, in quo ſe ſecant, facto centro intervallo O R deſcribatur arcus R T, elementum ſuperficiei erit ſector O R T, cujus centrum gravitatis K diſtabit ab O per duas tertias partes radii O R.

Ex puncto dato quolibet C ducantur C F, C G parallelæ, & æquales rectis M R, N S, & jungatur F G: manifeſtum eſt ſectorem F C G = O R T, & pariter ejus centrum gravitatis diſtare a puncto C per duas tertias partes C F: Ergo ductis K P, H Q normalibus eidem C S erit H Q : K P : : 2 : 1.

His poſitis quum ſolidum genitum ab O R T ſit = O R T ductum in circumferentiam radii K P, & ſolidum genitum a C F G ſit = C F G in circumferentiam radii H Q erit primum ſolidum ad alterum ut 1 : 2 : quæ ratio quum ſit conſtans valebit etiam in ſummatoriis finitis.

Sit primum A M B tractoria, cujus tangens M R ſemper eſt conſtans. Prima tangens ſit A C. Manifeſtum eſt, figuram in quam deſinunt parallelæ, & æquales tangentibus tractoriæ fore circuli circumferentiam A G: Igitur ſolidum genitum a ſpatio A C R M rotante circa C R erit ad ſolidum genitum a ſectore A C G rotante circa C E erit : : 1 : 2. Quapropter ſolidum infinite longum productum a tractoria gyrante circa ſuum aſſymptoton erit dimidium hemiſphærii habentis pro radio tangentem tractoriæ.

Sit deinde A M (*Fig.* 17) logiſtica, cujus proprietas eſt, ut ſubtangens ſit conſtans. Manifeſtum eſt, quod facta C E æquali ſubtangenti logiſticæ, & excitata normali E A; C F, C A parallelæ tangentibus R M, C A eiſdem æquales erunt: Ergo ſolidum genitum a ſuperficie A C R M eſt dimidium ſolidi geniti a ſuperficie C F A rotatione facta circa E C R: Ergo ſolidum infinite longum terminatum ad A C erit dimidium coni, cujus altitudo eſt C E = ſubtangenti logiſticæ, & cujus latus C A = tangenti C A.

Hæc ad illuſtrandam regulam Guldini ſufficiant, quæ tametſi difficilia non ſint, habent tamen non exiguam utilitatem.

DE

OPUSCULUM TERTIUM.

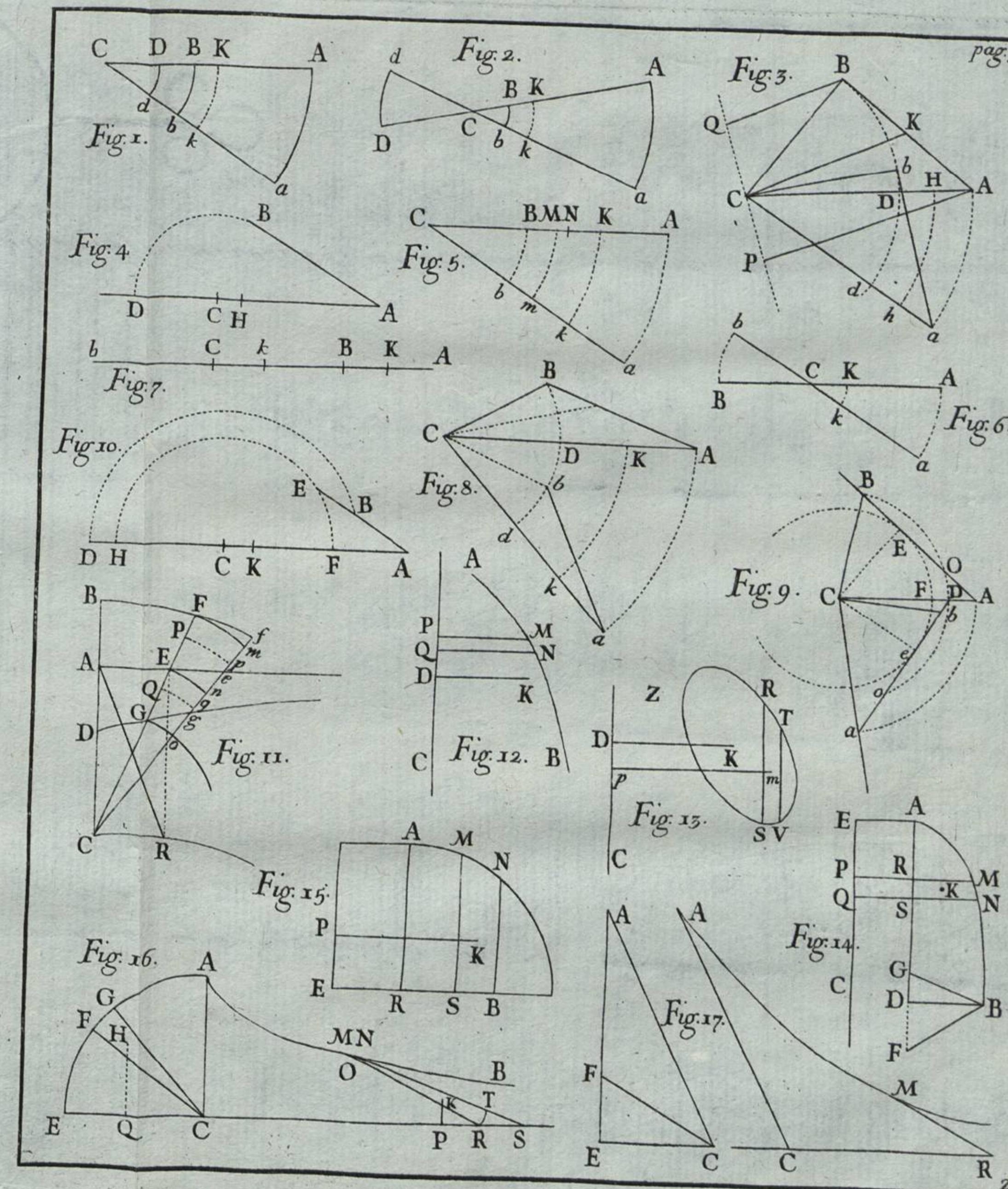
De multiplici logarithmorum ſyſtemate. Diſquiſitio Mathematica.

QUoniam non raro a Scriptoribus mathematicis mentio fit de logarithmis cum vulgaribus, tum hyperbolicis; neque ſatis adhuc illis, qui geometriæ ſublimiori diſcendæ vacant, inter utrumque genus diſcrimen diſtinctum eſſe videtur: iccirco gratum me omnibus facturum eſſe confido, ſi rem hanc totam clare, ac diſtincte ex ſuis principiis deducam, & fontes, ex quibus diverſitas oritur, patefaciam. Quod ubi præſtitero, nemini uni difficile erit, utrumque genus, prout res poſcet, in uſum ſine paralogiſmo vocare. Quamquam ex comparatione inter ſeries geometricas, & arithmeticas primum detecti ſint logarithmi; tamen quum de hyperbolæ quadratura mihi ſint omnino verba facienda, commodiſſimum mihi viſum eſt, ex eadem quadratura theoriam omnem derivare.

Si inter aſymptotos CH, CN (*Fig.* 1) ad angulum rectum concurrentes, poſita ſit hyperbola HBS, & in CN accipiantur lineæ quatuor CI, CL, CM, CN geometrice proportionales ita, ut ſit CI : CL :: CM : CN: ajo, ductis ordinatis IP, LQ, MR, NS, ſpatia PILQ, RMNS fore æqualia.

Quamquam hoc notiſſimum eſt, tamen breviter demonſtro. Sume elementa infiniteſima I*i*, M*m*, quæ ſint inter ſe, ut CI : CM, & ducantur ordinatæ *ip*, *mr*. Quoniam ex conſtructione I*i* : M*m* :: CI : CM, & ex natura hyperbolæ CI : CM eſt in ratione reciproca IP : MR, erit I*i* : M*m* in ratione reciproca IP : MR: Ergo rectangula P*i*, R*m* reciprocantia latera erunt æqualia. Si ſumantur denuo duo nova elementa, quæ ſint ut CI : CM, ſive ut C*i* : C*m*, eadem ratione rectangula provenient æqualia: Ergo progreſſu hoc in infinitum producto palam fiet, omnia rectangula exhaurientia ſpatium PL æqualia eſſe omnibus rectangulis exhaurientibus ſpatium RN: Ergo ſpatia hæc hyperbolica PL, RN erunt æqualia. Q. E. D.

Ex quocunque puncto D ducatur ordinata DE. Quoniam differentia inter ſpatia EDIP, EDLQ eadem eſt ac differentia inter ſpatia EDMR, EDNS, apparet inter hæc quatuor ſpatia inter-


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.

tercedere proportionem arithmeticam. Itaque dum abſciſſæ ſumptæ in aſymptoto CN, & incipientes a centro C ſunt in ratione geometrica, ſpatia hyperbolica incipientia a qualibet DE, & eiſdem abſciſſis reſpondentia tenent rationem arithmeticam. Igitur ſi accipiantur in aſymptoto lineæ conſtituentes ſeriem geometricam, ſpatia hyperbolica conſtituent ſeriem arithmeticam.

Hiſce, quæ notiſſima ſunt, breviter attactis, deſcribatur jam nova curva HDY ejus conditionis, ut rectangulum ex data qualibet, quam vocabo $= b$, & ex ordinata TI perpetuo æquet ſpatium hyperbolicum EDIP. Quoniam hujuſce curvæ ordinatæ eam ſervant rationem, quam ſpatia hyperbolica, conſtat, eas eſſe in ratione arithmetica, quoties abſciſſæ ſunt in ratione geometrica, & efformare ſeriem arithmeticam, quoties per abſciſſas efformatur ſeries geometrica. Quamobrem abſciſſas CI, CL numeros appellant, ordinatas autem IT, LV eorundem numerorum logarithmos, & curvam HDY logiſticam, ſeu logarithmicam. Ut autem notis expeditis utamur, ad indicandum logarithmum numeri cujuſdam CI, ſive rectam IT ſcribemus l CI; ita ut littera l lineæ præfixa ejus lineæ deſignet logarithmum.

Ex ſola inſpectione figuræ apparet, $l\,CD = 0$. Numerus autem CD ex arbitratu determinari poteſt. Logarithmus autem numeri ſuperantis CD erit affirmativus, negativus autem erit logarithmus numeri minoris quam CD. Ex quibus propoſitio converſa ſtatim colligitur: nimirum logarithmus $= 0$ habet numerum $=$ CD, logarithmus affirmativus habet numerum majorem quam CD, negativus autem minorem quam CD. Quemadmodum conſideravi tanquam poſitivos logarithmos poſitos ſub linea CN, negativos, qui ſupra CN ſiti ſunt; ita hos potuiſſem conſiderare ut affirmativos, illos ut negativos. Qua in hypotheſi numeri minores quam CD haberent poſitivos logarithmos, majores haberent logarithmos negativos. Hoc autem animadvertiſſe juvabit, ubi logarithmorum ſyſtema indicabimus, quo uſus eſt Joannes Neperus doctiſſimus hujuſce methodi inventor.

Arbitraria eſt, ut ſupra diximus, determinatio numeri CD habentis logarithmum $= 0$. Verum facta hac determinatione nondum logarithmica HDY determinata eſt: ſed præterea determinanda eſt conſtans $= b$, quæ per logarithmos multiplicata exhibet ſpatia hyperbolica, aut alia quælibet conſtans, per quam ipſa b determinata remaneat: ut ſi quis determinaret numerum, cujus logarithmus aut eſſet æqualis CD, aut ad CD datam haberet proportionem. Hoc autem ſilentio prætereundum non erat, quia

ex

ex determinatione unius potius, quam alterius conſtantis oriuntur diverſa logarithmorum ſyſtemata. Sed antequam de hoc dicimus, propoſitiones ſunt aliquot præmittendæ.

Propoſitio prima. Si fuerint quatuor numeri geometrice proportionales logarithmi mediorum æquabunt logarithmos extremorum.

Conſtat hæc propoſitio ex ſupradictis. Nam numeri geometrice proportionales habent logarithmos proportionales arithmetice: atqui notum eſt, quatuor quantitates arithmetice proportionales ita eſſe affectas, ut extremarum ſumma ſummam æquet mediarum: Ergo ſi numeri ſint geometrice proportionales eorum logarithmi habebunt ſummam extremorum æqualem ſummæ mediorum. Q. E. D.

Corollarium primum. Hinc conſtat fore $l\frac{bk}{f} = lb + lk - lf$. Nam $\frac{bk}{f}$ eſt quarta geometrice proportionalis poſt f, b, k: Ergo ejus logarithmus additus $lf = lb + lk$: Igitur $l\frac{bk}{f} = lb + lk - lf$.

Corollarium alterum. Si quantitas $b = k$, haberetur $l\frac{b^2}{f} = 2lb - lf$. Si $k = \frac{b^2}{f}$ erit $l\frac{b^3}{f^2} = 3lb - 2lf$. Immo generatim per hanc methodum inveniemus $l\frac{b^p}{f^{p-1}} = plb - \overline{p+1}\,.\,lf$.

Corollarium tertium. Si ſit $f =$ CD erit $lf = 0$: Ergo $l\frac{b^p}{f^{p-1}} = plb$. Multa alia deduci poſſunt, quæ lectoris induſtriæ relinquuntur.

Propoſitio ſecunda. Æquationem logarithmicæ exhibere.

Ex hyperbolæ vertice principali demittatur BA normalis aſymptoto CN, & fiat BA $=$ CA $= a$, CD $= f$. Sumatur CL $= mf$; m eſt numerus conſtans determinandus prout uſus veniet. Numeri autem CL logarithmus eſt LV, quem vocabimus $= g$, ita ut ſit $g = lmf$. Ducta vero VZ parallela CM fiat LM $=$ VZ $= x$, MR $= y$, ZX $= z$: quare $mf + x$ erunt numeri, $g + z$ logarithmi.

Ex æquatione hyperbolæ erit $\frac{a^2}{mf+x} = y$: Ergo facta multiplicatione per dx fiet $\frac{a^2dx}{mf+x} = ydx$. Quum autem ſpatium hyper-

perbolicum EDMR $= b . MX = b . \overline{g + z}$, elementum ejuſdem ſpatii nempe $y\,dx$ debebit æquare $b\,dz$: Igitur $\frac{a^2\,dx}{mf + x} = bdz$. Ex hac æquatione differentiali determinare oportet proportionem, quæ intercedit inter numeros $mf + x$, & logarithmos $g + z$.

Corollarium. Quanquam non eſt animus indicare logarithmicæ proprietates, quæ ab aliis patefactæ ſunt; tamen hoc omnino neceſſarium eſt animadvertere, ſubtangentem logiſticæ acceptam in aſſymptoto CH fore $= \frac{a^2}{b}$; quod cuique proclive eſt demonſtratu. Nam $\frac{a^2}{b} = \frac{\overline{mf + x} . dz}{dx}$; ſed hæc eſt expreſſio ſubtangentis ſumtæ in aſſymptoto: Ergo ec. Quare vocata ſubtangente $= c$, quod ſemper deinceps faciemus, æquatio logarithmicæ erit $\frac{c\,dx}{mf + x} = dz$.

Hinc deducere licet, per quamlibet logarithmicam, ſeu per logarithmicam cujuſcumque ſubtangentis quadrari poſſe quamlibet hyperbolam. Etenim ſi oporteat quadrare hyperbolam æquilateram; cujus potentia ſit $= a$, inveniatur tertia proportionalis poſt c, a, quæ vocetur $= b$, ita ut ſit $b = \frac{aa}{c}$, ſpatium hyperbolicum erit æquale $b . \overline{g + z}$ addita, vel demta conſtante, prout opus fuerit. Quod ſi hyperbola non fuerit æquilatera, neque angulus aſſymptotorum rectus, tunc ſpatium hyperbolicum æquabit non rectangulum $b . \overline{g + z}$, ſed parallelogrammum, cujus latus unum ſit b, alterum autem $g + z$, quæ duo latera angulum efficiant æqualem angulo aſſymptotorum.

Propoſitio tertia. Dato numero invenire per ſeriem logarithmum; hoc eſt in noſtris ſymbolis dato $mf + x$, invenire $g + z$. Fiat $g + z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5$ ec. Ergo differentiis acceptis $dz = \frac{c\,dx}{mf + x} = B\,dx + 2\,C\,x\,dx + 3\,D\,x^2\,dx + 4\,E\,x^3\,dx + 5\,F\,x^4\,dx$ ec. Facta itaque multiplicatione per $mf + x$, & diviſione per dx, fiet

$$c = mfB + 2\,mfCx + 3\,mfDx^2 + 4\,mfEx^3 + 5\,mfFx^4 \text{ ec.}$$
$$\quad Bx + 2\,Cx^2 + 3\,Dx^3 + 4\,Ex^4 \text{ ec.}$$

Quæ æquatio quum debeat eſſe identica, fiet $B = \frac{c}{mf}$, $C = \frac{-c}{2m^2\,f^2}$, $D = \frac{c}{3\,m^3\,f^3}$, $E = \frac{-c}{4\,m^4\,f^4}$, $F = \frac{c}{5\,m^5\,f^5}$. Itaque erit $g + z$

$= A + \frac{cx}{mf} - \frac{cx^2}{2m^2f^2} + \frac{cx^3}{3m^3f^3} - \frac{cx^4}{4m^4f^4} + \frac{cx^5}{5m^5f^5}$ ec. Ut valor conſtantis A determinetur adverti debet, quod ſi $x = o$, etiam $z = o$: Ergo $A = g$. Quum autem ſit $A = g = lmf$, & $g + z = l\,\overline{mf + x}$ erit $l\,\overline{mf + x} = lmf + c \, . \, \overline{\frac{x}{mf} - \frac{x^2}{2m^2f^2} + \frac{x^3}{3m^3f^3} - \frac{x^4}{4m^4f^4}}$ Q. E. I.

Corollarium. Si x ſumatur negativa, ita ut logarithmus quæratur quantitatis $\overline{nf - x}$, erit $l\,\overline{mf - x} = lmf + c \, . \, \overline{\frac{-x}{mf} - \frac{x^2}{2m^2f^2} - \frac{x^3}{3m^3f^3} - \frac{x^4}{4m^4f^4}}$ ec.

Ut uſus harum ſerierum palam fiat, ſupponamus primum $m = 1$, ita ut puncta L, V coincidant cum puncto D. Tum $lf = o$: Ergo habebimus $l\,\overline{f + x} = c \, . \, \overline{\frac{x}{f} - \frac{x^2}{2f^2} + \frac{x^3}{3f^3} - \frac{x^4}{4f^4} + \frac{x^5}{5f^5}}$. Quæ ſeries erit convergens, donec $x = f$: ſi enim x, vel tantillum ſuperet f, tum poſt aliquot terminos ſpecie convergentes ſequuntur termini divergentes. Quare ſeries utilis erit ad inveniendos logarithmos numerorum ab f uſque ad $2f$. Inveniemus autem $l2f = c \, . \, \overline{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}}$ ec.

Hiſce inventis ponamus $m = 2$, & erit $l\,\overline{2f + x} = l2f + c \, . \, \overline{\frac{x}{2f} - \frac{x^2}{2^2 \, . \, 2f^2} + \frac{x^3}{2^3 \, . \, 3f^3} - \frac{x^4}{2^4 \, . \, 4f^4}}$ ec. Quæ ſeries convergens erit, donec $x = 2f$, quo in caſu habebimus $l4f = l2f + c \, . \, \overline{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}$ ec., ſive $l4f = 2l2f = 2c \, . \, \overline{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}$ ec. Quapropter per ſeriem inveniemus logarithmos omnium numerorum a $2f$ uſque ad $4f$.

Ponamus $m = 4f$, & erit $l\,\overline{4f + x} = l4f + c \, . \, \overline{\frac{x}{4f} - \frac{x^2}{2 \cdot 4^2 f^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 4^3 f^3} - \frac{x^4}{4 \cdot 4^4 f^4}}$ ec. Series autem erit convergens, donec $x = 4f$, quo in caſu erit $l8f = l4f + c$.

1 —

$\overline{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}}$ ec. ſive $l8f = 3l2f = 3c \cdot \overline{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}$ ec. Atque ita deinceps progrediendo omnium numerorum logarithmos per ſeries convergentes inveniemus.

Quod attinet ad logarithmos numerorum minorum quam f, ſi ponatur $m = 1$, & x negativa, invenientur eadem ratione logarithmi numerorum a f uſque ad $\frac{f}{2}$: tum ſi ponatur $m = \frac{1}{2}$, invenientur logarithmi numerorum a $\frac{f}{2}$ uſque ad $\frac{f}{4}$: atque ita deinceps.

In ſuperioribus quædam adnotanda ſunt, quæ praxim reddunt difficillimam. Series $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ ec. Ex duabus ſeriebus componitur, quarum prima ex illis terminis conſtat, quibus præfigitur ſignum $+$, altera ex illis quibus ſignum $-$ præponitur. Utraque ex iſtis ſeriebus infinita eſt, licet earum differentia ſit finita. Huic incommodo facile medemur, ſi reapſe ſingulorum parium differentiam ſumamus, & ſeriem formemus hujuſmodi $\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{9 \cdot 10} + \frac{1}{11 \cdot 12}$ ec. Verum hæc ſeries lentiſſime convergit ita, ut oporteat ſumere terminos ſeptem & decem, ut ſolum ad partes milleſimas perveniamus. Quare neceſſe erit tot operationes inſtituere, quot dilaſſare valeant quemque arithmeticum.

Quemadmodum proceſſimus per ſeriem f, $2f$, $4f$, $8f$, ec., ut inveniremus primum logarithmos numerorum inter f, & $2f$, tum inter $2f$, & $4f$, atque eadem ratione deinceps: ita poſſumus procedere per ſeriem, cujus termini minus inter ſe differant, exempli cauſſa f, $\frac{3}{2}f$, $\frac{9}{4}f$, $\frac{27}{8}f$, $\frac{81}{16}f$ ec. ex qua ratione inveniemus numerorum logarithmos per ſeries magis convergentes. Facta itaque $m = 1$, inveniemus logarithmos numerorum ab f uſque ad $\frac{3}{2}f$: quo in caſu extremo quum ſit $x = \frac{f}{2}$, habebimus $l\frac{3}{2}f = c \cdot \overline{\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \frac{1}{5 \cdot 2^5}}$ ec. quæ ſeries aliquanto magis convergit. Tum fiat $m = \frac{3}{2}$, atque in hac ſuppoſitione inveniemus logarithmos numerorum a $\frac{3}{2}f$ uſque ad $\frac{9}{4}f$, inter quos jacet $2f$, cujus logarithmus invenietur $l2f = l\frac{3}{2}f + c \cdot \overline{\frac{1}{3} - \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} - \frac{1}{4 \cdot 3^4} + \frac{1}{5 \cdot 3^5}}$ ec. Deinde inveniemus logarithmum numeri $\frac{9}{4}f$, nempe $l\frac{9}{4}f = 2l\frac{3}{2}f$

 $= 2c$

$= 2c \,.\, \overline{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2.2^2} + \tfrac{1}{3.2^3} - \tfrac{1}{4.2^4}}$ ec. Præterea faciamus $m = \frac{9}{4}$, & progrediamur uſque ad logarithmum numeri $\frac{27}{8} f$, qui erit triplus $l\,\frac{3}{2} f$. Inter hos numeros jacet numerus $3f$, cujus logarithmus erit $l\,3f = l\,\frac{9}{4} f + c \,.\, \overline{\tfrac{3}{4} - \tfrac{3^2}{2.4^2} + \tfrac{3^3}{3.4^3} - \tfrac{3^4}{4.4^4}}$ ec. Tum fiat $m = \frac{27}{8} f$, & inveniantur logarithmi numerorum uſque ad $\frac{81}{16} f$, atque ita deinceps.

Series autem, ut cuique patens eſt, convergerent magis magiſque, ſi progrederemur per ſeriem, cujus primi termini magis ad æqualitatem accederent, ut f, $\frac{10}{11} f$ ec. Hæc methodus utilis eſſe poteſt; ſed plures operationes inſtituendæ ſunt ad inveniendos logarithmos numerorum integrorum, quam in ea, quam paucis exponam.

Quum $l\,mf \,.\, \frac{mf + x}{mf - x} = l\,mf + l\,\overline{mf + x} - l\,\overline{mf - x}$ habebimus $l\,mf \,.\, \frac{mf + x}{mf - x} = l\,mf + 2c \,.\, \overline{\tfrac{x}{mf} + \tfrac{x^3}{3m^3 f^3} + \tfrac{x^5}{5m^5 f^5}}$ ec. Hæc ſeries magis convergens eſt, quam ſuperiores. Si ponamus $m = 1$, inveniemus $lf \,.\, \frac{f + x}{f - x} = 2c \,.\, \frac{x}{f} + \frac{x^3}{3f^3} + \frac{x^5}{5f^5} + \frac{x^7}{7f^7}$ ec. Hujuſmodi ſeries cujuſcumque numeri logarithmus quæratur, ſemper convergens eſt. Nam ſi generatim quæratur lpf, fieri debet $\frac{f + x}{f - x} = p$: Igitur $\frac{x}{f} = \frac{p - 1}{p + 1}$: quæ quantitas quum minor ſit quam unitas, conſequitur terminos poſteriores in ſerie ſemper anterioribus minores eſſe, & ultimum evadere infiniteſimum.

Si ex hac ſerie quæramus $l\,10f$, fiet $\frac{x}{f} = \frac{9}{11}$: quare habebimus $l\,10f = 2c \,.\, \overline{\tfrac{9}{11} + \tfrac{9^3}{3.11^3} + \tfrac{9^5}{5.11^5} + \tfrac{9^7}{7.11^7}}$ ec. Verum magis convergentes ſeries inveniemus, ſi per partes progrediamur. Pone $m = 1$, & ad inveniendum $l\,2f$, ſtatue $\frac{x}{f} = \frac{1}{3}$, & ſeriem hujuſmodi elicies $l\,2f = 2c \,.\, \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3.3^3} + \tfrac{1}{5.3^5} + \tfrac{1}{7.3^7}$ ec. quæ

maxi-

maxime convergit. Invento $l2f$, nanciſcemur $l4f = 2l2f$, $l8f = 3l2f$, $l16f = 4l2f$: atque ita deinceps.

Si in noſtra formula fiat $m = 2$, inveniemus logarithmos numerorum, qui ſiti ſunt inter $2f$, & $4f$, ut logarithmum numeri $3f$. In hoc autem caſu inveniemus $\frac{x}{2f} = \frac{1}{5}$. Quare erit $l3f = l2f + 2c. \overline{\frac{1}{5} + \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} + \frac{1}{7.5^7}}$ ec. Similiter facto $m = 4$, inveniemus logarithmos numerorum inter $4f$, & $8f$. Facto item $m = 8$, inveniemus logarithmos numerorum, qui ſiti ſunt inter $8f$, $16f$. Ut autem logarithmum numeri $10f$ inveniamus, neceſſe eſt ponere $\frac{x}{8f} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$: Igitur $l10f = l8f + 2c. \frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5} + \frac{1}{7.9^7}$ ec. Atque hac ratione progredientes logarithmos numerorum per ſeries maxime convergentes inveniemus.

Non ſum neſcius, in pleriſque logarithmis inveniendis, compendio nos uti poſſe: Nam dato cujuslibet numeri logarithmo omnium numerorum, qui conſtituunt ſeriem geometricam poſt f, & datum numerum, logarithmi invenientur. Immo datis duorum numerorum logarithmis tertii, quarti ec. proportionalis dantur logarithmi. Numerus qui oritur ex multiplicatione duorum, quorum logarithmi dati ſunt, habet logarithmum datum: numeri, qui oritur per diviſionem, ſi diviſor & dividendus, habet logarithmos datos, logarithmus cognoſcetur. Hæc, & ſimilia compendia geometræ cuilibet obvia ſunt. Quare ad ſeries non erit confugiendum, niſi ubi habeantur numeri primi. Series autem ſemper magis convergentes invenientur, ſi ponatur mf illi numero æqualis, qui proxime præcedit numerum, cujus quæritur logarithmus.

Propoſitio quarta. Dato logarithmo invenire numerum; hoc eſt in noſtris ſymbolis dato $g + z$, invenire $mf + x$. Hanc ob rem fiat $mf + x = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4$ ec. Ergo acceptis differentiis $dx = Bdz + 2Czdz + 3Dz^2dz + 4Ez^3dz$ ec. & multiplicando utramque partem æquationis per c, & dividendo primam per $mf + x$, alteram per ſeriem æqualem nanciſcemur

$$\frac{cdx}{mf+x} = dz = \frac{c.\overline{Bdz + 2Czdz + 3Dz^2dz + 4Ez^3dz \text{ ec.}}}{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 \text{ ec.}}$$

Igitur ſi fiat multiplicatio per ſeriem dividentem, erit $Adz +$

Bzdz

$Bzdz + Cz^2dz + Dz^3dz + Ez^4dz$ ec. $= cBdz + 2cCzdz + 3cDz^2dz + 4cEz^3dz + 5cFz^4dz$ ec. Inſtituenda jam eſt collatio, ut quantitatum conſtantium indeterminatarum B, C, D ec. valores determinentur. Ex comparatione autem hujuſmodi valores inveniuntur $B = \frac{A}{c}$, $C = \frac{A}{2c^2}$, $D = \frac{A}{2.\,3c^3}$, $E = \frac{A}{2.\,3.\,4.\,c^4}$, $F = \frac{A}{2.\,3.\,4.\,5.\,c^5}$; atque ita deinceps. Igitur fiet $mf + x = A + \frac{Az}{c} + \frac{Az^2}{2c^2} + \frac{Az^3}{2.\,3.\,c^3} + \frac{Az^4}{2.\,3.\,4.\,c^4}$ ec. Ad determinandum conſtantis A valorem, adverte fieri $x = o$, ſi fuerit $z = o$: Ergo fiet $A = mf$. Quare facta ſubſtitutione, & in utraque æquationis parte deletis æqualibus, erit $x = mf\,.\,\overline{\frac{z}{c} + \frac{z^2}{2c^2} + \frac{z^3}{2.\,3\,c^3} + \frac{z^4}{2.\,3.\,4\,c^4}}$ ec. Fac advertas mf eſſe numerum, cujus logarithmus eſt $= g$. Hiſce poſitis.

Sit primo $g = o$, ut ejus numerus $= f$, & $m = 1$, & orietur $x = f\,.\,\overline{\frac{z}{c} + \frac{z^2}{2c^2} + \frac{z^3}{2.\,3.\,c^3} + \frac{z^4}{2.\,3\,4\,c^4}}$ ec. Ex qua æquatione quæcumque ponatur z, quæ eſt logarithmus numeri $f + x$, invenietur x, adeoque $f + x$. Verum ſatius erit per partes procedere, & ex ultima æquatione invenire numerum cujus logarithmus ſit z, quæ ſatis parva ſumatur: tum hoc numero facto $= mf$, cujus logarithmus ſit $= g$, ſumatur alia z exigua, & ſic inveniemus numerum $mf + x$, cujus logarithmus eſt $g + z$: hoc definito ad alios deinceps progrediemur.

Numeri, qui ex datis logarithmis inveniuntur, dependent tum a ſubtangente c, tum etiam a quantitate f: quarum quantitatum, niſi altera per alteram determinetur, per partes progredi non licebit. Ut autem exemplum clarum proponamus rationis, qua per partes progredi oportet, ſupponamus $c = f$, quod exemplum deinceps veniet in uſum. Hac ſtatuta determinatione fiet $x = mf\,.\,\overline{\frac{z}{f} + \frac{z^2}{2f^2} + \frac{z^3}{2.\,3f^3} + \frac{z^4}{2.\,3.\,4\,z^4}}$ ec. Pono $m = 1$, & invenio $x = f\,.\,\overline{\frac{z}{f} + \frac{z^2}{2f^2} + \frac{z^3}{2.\,3f^3} + \frac{z^4}{2.\,3.\,4f^4}}$ ec. Hæc ſe-

ries

ries exhibebit numeros $f + x$ omnium logarithmorum, qui poſiti ſunt inter o, & f. Quapropter poſito $z = f$, invenietur $f + x = f + f . \overline{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4}}$ ec. Series hæc vocetur $= A$, ut ſit $f + x = f + fA$.

Supponatur jam $m = \overline{1 + A}$, & fiet $x = \overline{1 + A} . f . \overline{\frac{z}{f} + \frac{z^2}{2f^2} + \frac{z^3}{2.3f^3} + \frac{z^4}{2.3.4f^4}}$ ec. Series iſta utilis erit inveniendis numeris, qui reſpondent logarithmis $f + z$ ſitis inter f, & $2f$, ſi z indatur valor poſitus inter o, & f. Quare ſi ponatur $z = f$, fiet $x = \overline{1 + A} . f . \overline{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} \text{ ec.}} = \overline{1 + A} . Af$. Itaque $\overline{1 + A} . f + x = \overline{1 + A} . f\,\overline{A + AA} . f = \overline{AA + 2A + 1} . f = \overline{A + 1}^2 . f$; qui eſt numerus, cujus logarithmus æquat $2f$.

Si ſtatuas $mf = \overline{A + 1}^2 . f$, eodem modo invenies, numerum, cujus logarithmus æquat $3f$, eſſe $= \overline{A + 1}^3 . f$. Per ſeriem autem elicies numeros omnium logarithmorum, qui ſiti ſunt inter $2f$, & $3f$; atque ita in infinitum.

Ita ſi invenire deſideras numerum, cujus logarithmus ſit $= \frac{5}{2}f$, fac invenias prius numerum, cujus logarithmus ſit $= 2f$, qui numerus demonſtratus eſt $= \overline{A + 1}^2 . f$. Tum fac $m = \overline{A + 1}^2$, & $z = \frac{1}{2}f$: Ergo $x = \overline{A + 1}^2 . f . \overline{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 . 2} + \frac{1}{2^3 . 2 . 3} + \frac{1}{2^4 . 2 . 3 . 4}}$ ec.; quæ ſeries ſi vocetur B, erit $x = \overline{A + 1}^2 . f . B$: Ergo $\overline{A + 1}^2 f + x$, qui eſt numerus logarithmi dati, erit $= \overline{A + 1}^2 . \overline{B + 1} . f$. Simili ratione uti debes, cujuſcumque valoris ſit tangens c.

Hiſce præmiſſis advertendum eſt, logarithmorum ſyſtema non minus dependere a quantitate f, cujus logarithmus $= o$, quam deinceps vocabimus protonumerum, quam a quantitate c, quæ eſt ſubtangens logiſticæ, & ſubtangens ſyſtematis ex analogia appellari poteſt. Quoniam ſyſtema mutari poteſt ex utriuſque quantitatis mutatione, conſiderandum eſt, quibusnam conditionibus hujuſmodi ſyſtematum mutationes peragantur.

Primum mutetur protonumerus eadem manente logiſticæ ſubtan-

tangente. Conſtituta ut ſupra hyperbola (*Fig.* 2) EBR, & ſumpto protonumero $CD = f$, deſcribatur logiſtica, cujus ordinata MX ducta in $b = \frac{aa}{c}$ æquet ſpatium hyperbolicum EDMR. Deinde ſumto protonumero $CF = F$, deſcribatur alia logiſtica, cujus ordinata MZ in eandem b ducta æquet ſpatium hyperbolicum GFMR. Igitur $b \,.\, XZ$ æquabit ſpatium hyperbolicum EDFG: atqui hoc ſpatium conſtans eſt: Ergo XZ ubique conſtans erit, atque adeo æqualis FH. Quare logarithmi ſyſtematis, in quo protonumerus minor eſt, ſuperabunt eorundem numerorum logarithmos in ſyſtemate, ubi major eſt protonumerus, per quantitatem conſtantem æqualem FH. Quantitas autem FH eſt logarithmus numeri $CF = F$, ſumtus in ſyſtemate, in quo protonumerus eſt $CD = f$.

Quamobrem dato quocumque logarithmorum ſyſtemate, cujus protonumerus $= f$, invenientur facillime logarithmi alterius ſyſtematis, cujus protonumerus ſit F. Etenim in ſyſtemate protonumeri f, inveniatur logarithmus numeri F: qui logarithmus dematur ab omnibus logarithmis ſyſtematis protonumeri f, & invenientur logarithmi ſyſtematis protonumeri F. Si $F > f$, in ſyſtemate protonumeri f, lF erit poſitivus, adeoque ſubtractio facienda eſt. Si vero $F < f$, idem lF erit negativus; quare mutato ſigno ſubtractio in additionem tranſibit.

Si vero unus idemque ſervetur protonumerus, & ſubtangens logarithmicæ mutetur, videndum eſt quamnam mutationem ſubeat logarithmorum ſyſtema. Iiſdem prorſus ſuppoſitis cum eodem protonumero (*Fig.* 3) $CD = f$, deſcribatur primum logiſtica DX, cujus ordinata ducta in b æquet ſpatium hyperbolicum ita, ut $b \,.\, MX = EDMR$. Item alia logiſtica deſcribatur DZ, cujus ordinata ducta in B æquet ſpatium hyperbolicum, ut ſit $B \,.\, MZ = EDMR$: Igitur $b \,.\, MX = B \,.\, MZ$: Igitur $MX : MZ :: \frac{1}{b} : \frac{1}{B}$. Ergo logarithmi in duobus ſyſtematibus ſunt in ratione conſtanti, hoc eſt in ratione reciproca earum quantitatum, quæ ductæ in logarithmos æquant ſpatium hyperbolicum: ſed iſtæ quantitates ſunt reciproce, ut logarithmicæ ſubtangentes: Ergo logarithmi in duobus ſyſtematibus, de quibus agimus, ſunt directe ut ſubtangentes. Quare datis unius ſyſtematis logarithmis facile eſt alterius cujuſque ſyſtematis per regulam trium, ut ajunt, logarithmos invenire; dummodo datæ ſint ſubtangentes.

Quod ſi datum ſit ſyſtema, cujus protonumerus ſit f, ſubtangens vero c, & alterum ſyſtema inveniendum ſit, cujus protonumerus ſit F, ſubtangens autem C: primo ex dato ſyſtemate invenia-

niatur ſyſtema protonumeri F, & ſubtangentis *c*; tum fiat *c* : C, ut ſinguli logarithmi modo inventi ad logarithmos, qui quærun- tur. Noti itaque fient logarithmi omnes, qui quæruntur. Quoad praxim in dato ſyſtemate inveni logarithmum numeri F. Hunc deme ex datis logarithmis, tum inveni quartas proportionales poſt *c*, C, & logarithmos datos ea quantitate minutos; & quæſi- tos logarithmos invenies.

Hoc unice adverto: hoc problema: Dato logarithmorum ſyſte- mate aliud ſyſtema invenire, in quo manentibus ceteris, mutetur protonumerus, eſt problema plerumque tranſcendens. Etenim FH, (*Fig.* 2) quæ detrahenda eſt ex logarithmis dati ſyſtematis, non datur plerumque niſi tranſcendenter per protonumerum novi ſyſte- matis CF. Addidi plerumque, quia, ſi in ſyſtemate protonumeri CD logarithmus numeri CF, nimirum FH habeat rationem effabilem ad CD, quod aliquando contingit, problema algebrai- cum eſt. Verum alterum hoc problema, manente eodem protonu- mero, & dato uno logarithmorum ſyſtemate, invenire aliud ſyſte- ma diverſæ ſubtangentis, eſt pure algebraicum, dummodo ſubtan- gentes ſint altera per alteram algebraice datæ.

Adverte hanc conditionem, quam appoſuimus, ſi ex ſubtan- gentibus altera per alteram data ſit. Nam ſi habeatur ſyſtema lo- garithmorum, in quo præter protonumerum data ſit tangens logi- ſticæ, & quæratur ſyſtema logarithmorum, in quo poſito eodem protonumero datus ſit dati numeri logarithmus, hoc nonniſi tra- ſcendenter obtinebitur, & viceverſa, ſi ex hoc primum quæratur logarithmorum ſyſtema. Etenim ſubtangens logiſticæ ex dato lo- garithmo dati numeri, nonniſi tranſcendenter habetur. Quo pacto autem ex dato logarithmo numeri dati, inveniatur ſubtangens, & viceverſa, adhibitis ſeriebus expoſitis non eſt difficile cognoſcere. Hoc autem invento ex uno ſyſtemate alium nanciſcemur.

Quod ſi poſito eodem protonumero, unius ejuſdemque numeri in uno ſyſtemate logarithmus ſit $= q$, in alio $= Q$, omnes lo- garithmi eorundem numerorum in duobus ſyſtematibus erunt in dire- cta ratione $q : Q$. Quare dato uno ſyſtemate algebraice alter de- terminabitur.

Hinc oritur duplex genus logarithmorum. Vel enim datur pro- tonumerus, & ſubtangens ſyſtematis; vel datur protonumerus ſy- ſtematis cum logarithmo dati numeri. Primum vocabimus ſyſtema logarithmorum generis hyperbolici, alterum generis vulgaris. Si unus idemque ſit protonumerus, nullus eſt tranſitus ab uno ſyſte- mate ad aliud, niſi per quantitates tranſcendentes.

Verum ut ejus ſyſtematis, cujus tabulæ exhibent logarithmos, conditiones cognoſcamus, quid ſit baſis logarithmica explicandum eſt. Baſis logarithmica dicitur numerus ille, cujus logarithmus æquat protonumerum. Quapropter ſi datus ſit protonumerus cum baſi logarithmica, logarithmorum ſyſtema erit generis vulgaris; neque ab hoc fiet tranſitus ad ſyſtema generis hyperbolici, niſi per quantitates tranſcendentes. Itaque tranſcendentia erunt hujuſcemodi problemata. Data baſi logarithmica invenire ſubtangentem ſyſtematis, & data ſubtangente invenire ſyſtematis baſim logarithmicam.

Hiſce generatim expoſitis opportunum erit, ut de duobus illis ſyſtematibus, quæ in uſu poſita ſunt, diſtinctius, & enucleatius verba faciamus. Syſtema logarithmorum vulgarium ponit logarithmum quantitatis cujuslibet f, quam ſtatuit protonumerum, eſſe æqualem nihilo, baſim autem logarithmicam eſſe $= 10f$, cujus ſcilicet logarithmus æquat protonumerum f. Syſtema autem logarithmorum hyperbolicorum, quo utuntur paſſim, convenit cum vulgari in hoc, quod ponit $lf = o$, ſed ejuſdem ſubtangentem ponit $= f$. Quo pacto alterum ſyſtema ad alterum redigatur, oportet cognoſcere.

Quamobrem hoc primum inveſtigemus, neceſſe eſt, ut in ſyſtemate vulgari ſubtangentem determinemus. Ex ſupradictis invenimus $l10f = l8f + 2c \,.\, \overline{\tfrac{1}{9} + \frac{1}{3\cdot 9^3} + \frac{1}{5\cdot 9^5} + \frac{1}{7\cdot 9^7}\ \text{ec.}}$;

atqui $l8f = 3l2f$, & $l2f = 2c \,.\, \overline{\tfrac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7}\ \text{ec.}}$

Ergo $l10f = 6c \,.\, \overline{\tfrac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7}\ \text{ec.}}$

$+ 2c \,.\, \overline{\tfrac{1}{9} + \frac{1}{3\cdot 9^3} + \frac{1}{5\cdot 9^5} + \frac{1}{7\cdot 9^7}}$ ec. Prima ex hiſce ſeriebus fiat $= A$, altera $= B$, ut ſit $l10f = 6Ac + 2Bc$: atqui $l10f = f$ in ſyſtemate vulgari: Ergo $f = 6Ac + 2Bc$, atque adeo $c = \frac{f}{6A + 2B}$. Inventa eſt itaque ſubtangens vulgaris ſyſtematis. Q. E. I.

Series duæ A, B maxime convergunt, & nullo negotio ad fractiones decimales rediguntur.

Quum ſemper poſito eodem protonumero f logarithmi eorundem numerorum in diverſis ſyſtematibus ſint inter ſe, ut ſyſte-

matum

matum ſubtangentes, logarithmi hyperbolici ad logarithmos vulgares erunt, ut $f : \frac{f}{6A + 2B}$, ſive ut $6A + 2B : 1$.

Jam ad logarithmos hyperbolicos convertendus eſt animus, & in illis invenienda eſt baſis logarithmica: quam ob rem ſolvendum eſt hoc problema: Poſito non minus protonumero, quam ſubtangente $= f$ invenire numerum, cujus logarithmus ſit $= f$.

Solutio ex ſupradictis eſt perquam facilis. Namque ſi ponamus $\frac{z}{f}$, ſeu $\frac{z}{c} = 1$, inveniemus $x = f . \overline{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 . 3} + \frac{1}{2 . 3 . 4} + \frac{1}{2 . 3 . 4 . 5}}$ ec. atque adeo $\overline{f + x}$ numerus reſpondens logarithmo $= f$, erit æqualis $f + f . 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 . 3 . 4} + \frac{1}{2 . 3 . 4 . 5}$ ec., quæ ſeries ſatis convergit. Quod ſi quæreretur numerus, cujus logarithmus æquaret 2, 3, aut $4f$; tum per partes eſſet procedendum, quemadmodum ſupra ſatis docuimus.

Adverte in tabulis cum logarithmorum hyperbolicorum, tum logarithmorum vulgarium protonumerum f æqualem poni unitati. Tabulæ logarithmorum vulgarium conſtructæ ſunt, & abſolutæ a multis, præſertim a Briggio, & Ulaquio, qui uſi ſunt ſubſidiis, quæ maxime diſtant a noſtris ſeriebus. Tabulæ vero logarithmorum hyperbolicorum deſiderantur. Optandum autem eſſet, ut aliquis hunc laborem ſuſciperet, & eas præſertim, quæ deſunt tabulæ, per computum perficeret, atque communi utilitati in lucem emitteret.

Nihil jam reliquum eſt, niſi ut reſpondeamus quærenti, ad quodnam genus pertineant logarithmi exhibiti in ſuis tabulis a doctiſſimo Joanne Nepero logarithmorum inventore. Reſpondeo, eos pertinere ad genus logarithmorum hyperbolicorum, ſive ad illos, in quibus algebraice data ſupponitur ſubtangens ſyſtematis. Sinum totum ipſe facit protonumerum, cujus ſcilicet logarithmus $= 0$ Idem ſinus totus exprimitur a Nepero per numerum 1000000. Sinus autem anguli gr. 89 -- 59′, qui exprimitur per numerum 999999, logarithmus ponitur $= 1$: Ergo quantum decreſcit numerus, tantum augetur logarithmus, ſi ſinus totus minimo decremento afficiatur.

Supponamus itaque CD (*Fig.* 4) eſſe ſinum totum, & protonumerum ſyſtematis. Decreſcat hic minimo elemento De, & ducatur ed parallela aſſymptoto logiſticæ, quæ erit logarithmus numeri Ce. Ex Neperi ſuppoſitione $De = de$. Ducatur DdT,

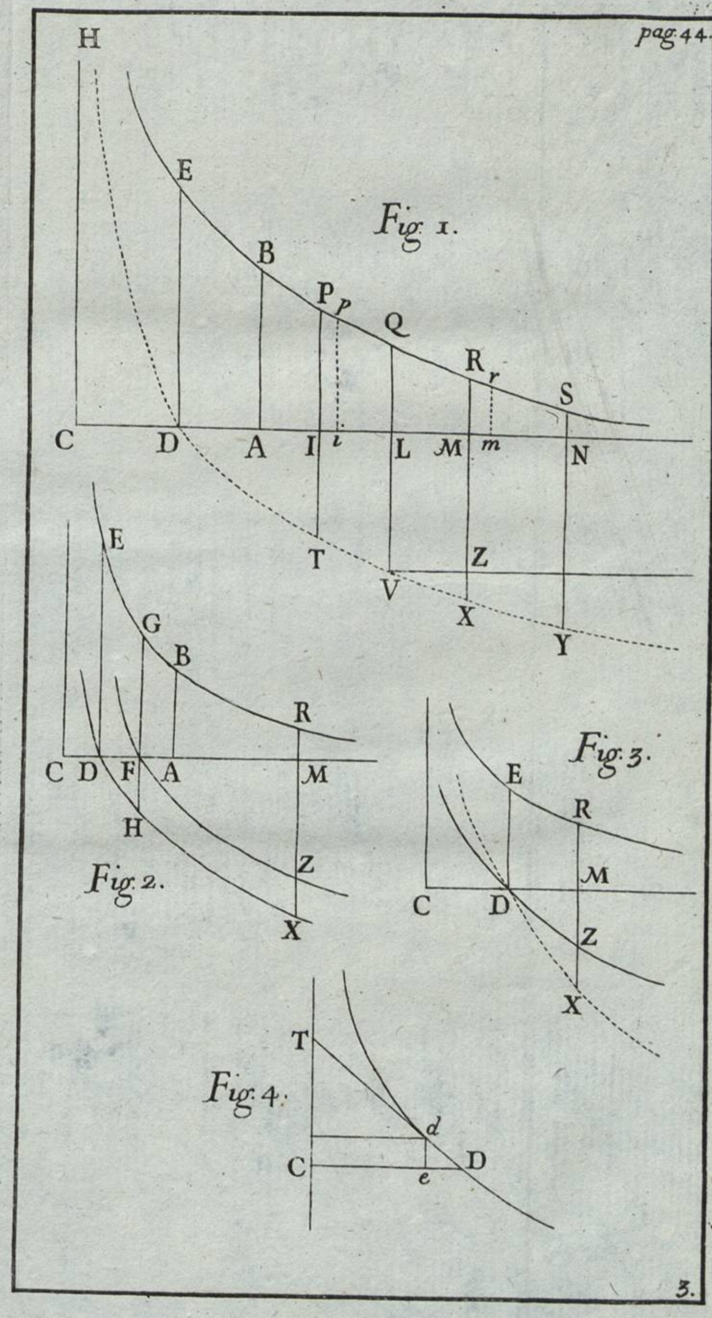
 quæ

quæ propter proximitatem punctorum D, *d* tanquam tangens conſiderari poteſt: Igitur CT erit tanquam ſubtangens conſideranda: Igitur quum ſit CT : CD : : *e*D : *ed*, erit CT = CD: Ergo ſubtangens ſyſtematis eſt protonumero æqualis. Quæ proprietas pertinet ad genus logarithmorum hyperbolicorum.

Non minus ſyſtema logarithmorum hyperbolicorum, quam Neperianum ſupponit ſubtangentem æqualem protonumero. Sed inter duo ſyſtemata hoc maxime intereſt, quod in illo numeri majores, quam protonumerus, habent logarithmos poſitivos, minores habent negativos; contra in Neperiano numeri minores, quam protonumerus, præditi ſunt logarithmis poſitivis, majores negativis.

Atque ex his ſatis ſuperque patet diſcrimen inter ſyſtemata logarithmorum, atque aperta eſt methodus efformandi tabulas logarithmorum tum vulgarium, tum hyperbolicorum. De eorum autem uſu paſſim Scriptores loquuntur, neque in præſentia quidquam attingere decrevi.

OPU-


Fig. 1.
H
E
B
P p
Q
R r
S
C D A I i L M m N
T
V
Z
X
Y
Fig. 2.
E
G
B
R
C D F A M
H
Z
X
Fig. 3.
E
R
M
C D
Z
X
Fig. 4.
T
d
C e D

OPUSCULUM QUARTUM.

De quarumdam æquationum radicibus. Diſquiſitio-Mathematica. De harum expreſſione Analitica.

PARS PRIMA.

QUa methodo reſolvantur æquationes ſecundi gradus, Arabes, ut notum eſt, nos docuerunt. Scipio Ferreus, ut narrat Cardanus, methodum adinvenit reſolvendæ æquationis cubicæ, cujus radicem unam exhibuit per formulam, quæ a Cardano nomen accepit. Denique Raphael Bombellus in ſua algebra expoſuit, qua ratione æquatio quadrato-quadratica ope æquationis cubicæ reſolvatur. Hanc autem methodum a Ludovico Ferrarienſi inventam eſſe, affirmat Wolfius. Æquationes altiorum graduum nulla adhuc methodo reſolvi potuerunt generatim, neque inveniri formula earum radicem exprimens. Quare deficiente œcumenica methodo non injuria in eo operam collocarunt analyſtæ, ut conditiones cognoſcerent, quibus poſitis æquationes reſolutionem accipiant.

Reſolvuntur autem primo, quum ſpoliatæ ſecundo termino carent omnibus aliis terminis, ſi ultimum excipias: deinde quum unus tantum terminus ex mediis adeſt, in quo exponens incognitæ dimidium eſt exponentis termini primi, quod contingere nequit, niſi hic exponens ſit numerus par: poſt reſolvuntur, quum ex mediis adſunt termini duo ita, ut exponentes incognitæ in tribus terminis ſint, ut 3, 2, 1; quod poſtulat exponentem maximum diviſibilem eſſe per 3: demum quum medii termini tres ſunt, & incognitæ exponentes ſunt ut 4, 3, 2, 1; quod obtineri nequit, niſi primi termini exponens dividi poſſit per 4.

Nemo unus non videt, conditiones iſtas anguſtis admodum finibus contineri in omnibus æquationibus, ſed præſertim in illis, in quibus incognitæ exponens maximum eſt numerus primus. In his enim præter primam conditionem nulla haberi poteſt, ſub qua reſolutionem accipiant. Verſabam jamdudum animo, in omnibus æquationibus, in illis etiam, quarum gradus a numero primo indicatur, determinari poſſe conditiones, quibus poſitis earum radix una ea ratione exprimi poſſit, qua Cardani radix cubica exprimitur,

tur. Ut rem exemplo declarem, judicabam adeſſe æquationem quinti gradus, cujus radix hanc formam haberet $\sqrt[5]{a+\sqrt{b}} + \sqrt[5]{a-\sqrt{b}}$. Verum difficilis videbatur methodus hujuſmodi conditiones determinandi. Sed non ita pridem methodus ſeſe mihi obtulit, non inelegans, quæ me docuit, quænam æquationes cujuſcumque gradus radicem accipiant expreſſam analytice eo modo, quo radix cubica. Hoc autem inventum, quiſque cognoſcet, in omnibus æquationibus utilitatem habere, ſed præcipue in illis, in quibus exponens maximum incognitæ eſt numerus primus. Rem igitur aggrediens incipiam ab æquationibus gradus alterius, deinde ad altiores progrediar.

Pono $x = m + n$, quam æquationem elevo ad quadratum, & fit $xx = mm + 2mn + nn$, ſive $xx - 2mn \begin{array}{l} - m^2 \\ - n^2 \end{array} = o$. Hujus radix eſt $x = m + n$, cui etiam addere poſſumus $x = - m - n$, ut radicem extrahenti palam fiet.

Ad æquationes cubicas progredior, & $x = m + n$ elevo ad poteſtatem tertiam $x^3 = m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$. Quam æquationem hoc pacto diſpono $x^3 = m^3 + 3mn . \overline{m+n} + m^3$, & ad eandem partem translatis terminis ſubſtituo x pro binomio $m + n$, & invenio $x^3 - 3mnx \begin{array}{l} - m^3 \\ - n^3 \end{array} = o$, cujus radix una erit $x = m + n$. Ad hanc æquationem unica hæc conditio requiritur, ut ſecundus terminus deſit, quod ſemper obtinere poſſumus.

Ut æquationes gradus quarti expediam, effero ad quartam poteſtatem $x = m + n$, & invenio $x^4 = m^4 + 4m^3n + 6m^2n^2 + 4mn^3 + n^4$: quæ æquatio hac ratione eſt diſtribuenda $x^4 = m^4 \begin{array}{l} + 4mn . \overline{m+n}^2 \\ - 2m^2n^2 \end{array} + n^4$. Pro $m + n$ pono x, & tranſlatis terminis nanciſcor $x^4 - 4mnx^2 + 2m^2n^2 \begin{array}{l} - m^4 \\ - n^4 \end{array} = o$, cujus radix una eſt $x = m + n$. In hac æquatione hæc conditio neceſſaria eſt, ut deficiente ſecundo termino deſit etiam quartus, & nulla poteſtas impar incognitæ x reperiatur.

Æquatio hac conditione prædita per alias methodos, ut notum

tum eſt negotio nullo reſolvitur. Poteſt enim conſiderari x^2, ut incognita, & addito dimidii coefficientis quadrato reſolvi per extractionem radicis. Sed eam ad noſtrum canonem æquationis quapraticæ reducamus hoc modo $\overline{x^2 - 2mn}^2 - 2m^2n^2 - m^4 = 0$,
$- n^4$
quam habere eandem formam cum quadratica, tibi conſtabit; ſi pro x, m, n ſubſtituas in quadratica $x^2 - 2mn$, m^2, n^2. Quare habebimus $x^2 - 2mn = m^2 + n^2$, & $x^2 - 2mn = - m^2 - n^2$. Quorum prima exhibet radices duas $x = m + n$, $x = - m - n$. Altera præbet $x = \overline{m - n} . \sqrt{-1}$, $x = \overline{-m + n} . \sqrt{-1}$.

Elevetur ad quintam poteſtatem $x = m + n$, & orietur $x^5 = m^5 + 5m^4n + 10m^3n^2 + 10m^2n^3 + 5mn^4 + n^5$. Hæc autem ita erit diſponenda $x^5 = m^5 + 5mn . \overline{m + n}^3 + m^3$. Ejce
$- 5m^2n^2 \overline{m + n}$
binomium $m + n$ ſubſtituta æquali quantitate x, & tranſpoſitis terminis invenies $x^5 - 5mnx^3 + 5m^2n^2x - m^3 = 0$, cujus una
$- n^3$
radix eſt $x = m + n$. Conditiones in æquatione inſunt duæ. Prima petit, ne termini omnes non abſint, in quibus incognita parem tenet dimenſionem. Altera exigit, ut coefficiens termini x^3 elatum ad quadratum exhibeat quintuplum coefficientis termini x.

Sexta poteſtas æquationis $x = m + n$ erit $x^6 = m^6 + 6m^5n + 15m^4n^2 + 20m^3n^3 + 15m^2n^4 + 6mn^5 + n^6$. Hæc ita diſponatur $x^6 = m^6 + 6mn . \overline{m + n}^4 + n^6$. Si transferas terminos
$- 9m^2n^2 . \overline{m + n}^2$
$+ 2m^3n^3$
facta ſubſtitutione x pro $m + n$, habebis $x^6 - 6mnx^4 + 9m^2n^2x^2$
$- 2m^3n^3 - m^6 = 0$; in qua præter conditiones requirentes, ut
$- n^6$
omnis terminus abſit, in quo x ad imparem poteſtatem aſcendit, neceſſe eſt, ut coefficiens termini x^2 ſit æquale quadrato coefficientis termini x^4 diviſo per 4.

Æquatio inventa duobus modis reſolvi poteſt ope æquationis cubicæ, & quadraticæ. Primo modo reducetur ad canonem æquationis quadraticæ per hujuſmodi formam $\overline{x^3 - 3mnx}^2 - 2m^3n^3$
$- m^6$

$\begin{matrix}-m^6\\-n^6\end{matrix} = o$, cujus radices erunt $x - 3mnx = m^3 + n^3$, $x^3 - 3mnx = -m^3 - n^3$, quarum prima ex canone æquationis cubicæ habet radicem $x = m + n$, altera radicem $x = -m - n$. Deinde perduci poteſt ad canonem radicis cubicæ hoc modo $\overline{x^2 - 2mn}^3 - 3m^2n^2 . \overline{x^2 - 2mn} \begin{matrix}-m^6\\-n^6\end{matrix} = o$, quæ, ſi conſideretur tanquam incognita $x^2 - 2mn$, eſt æquatio cubica, cujus radicem ex ſuperioribus conſtat eſſe $x^2 - 2mn = m^2 + n^2$. Hæc autem pertinet ad canonem æquationis quadraticæ, & duas haſce radices habet $x = m + n$, $x = -m - n$.

Quum agitur de æquatione gradus ſeptimi, æquationis $x = m + n$ poteſtas ſeptima ita eſt diſtribuenda

$$x^7 = m^7 + 7mn . \overline{m + n}^5 + n^7,$$
$$- 14m^2n^2 . \overline{m + n}^3$$
$$+ 7m^3n^3 . \overline{m + n}$$

quæ facta conſueta ſubſtitutione, & translatis terminis in hanc vertitur

$$x^7 - 7mnx^5 + 14m^2n^2x^3 - 7m^3n^3x \begin{matrix}-m^7\\-n^7\end{matrix} = o.$$

Hæc caret terminis omnibus, in quibus x ad parem poteſtatem aſcendit. Præterea ſi coefficientis termini x^5 diviſi per 7 primum quadratum ſumas, & multiplices per 14, habebis coefficiens termini x^3; deinde ſumas cubum, & multiplices per 7, obtinebis coefficiens termini x. Æquatio his conditionibus prædita habebit pro radice $x = m + n$.

Poſtquam ad octavam poteſtatem elevaveris $x = m + n$, æquationem ita diſtribue

$$x^8 = m^8 + 8mn . \overline{m + n}^6 + n^8,$$
$$- 20m^2n^2 . \overline{m + n}^4$$
$$+ 16m^3n^3 . \overline{m + n}^2$$
$$- 2m^4n^4$$

cujus terminos ſi transferas, & pro $m + n$ ponas x, fiet

$$x^8 - 8mnx^6 + 20m^2n^2x^4 - 16m^3n^3x^2 + 2m^4n^4 \begin{matrix}-m^8\\-n^8\end{matrix} = o,$$

cujus radix una eſt $x = m + n$. Ab hac abſunt termini omnis poteſtatis

ſtatis imparis, & terminorum poteſtatis paris coefficientes determinati ſunt uno determinato.

Inventam æquationem ad canonem æquationis quartæ perduces, ſi ita diſponas $\overline{x^2 - 2mn}^4 - 4m^2n^2 . \overline{x^2 - 2mn}^2 + 2m^4n^4 \begin{array}{l} - m^4 \\ - n^4 \end{array} = o$.

Nam ſi in æquatione, quam invenimus, gradus quarti pro x ſcribas $x^2 - 2mn$, & pro m, n ſcribas m^2, n^2, hæc ipſa exurget. Quare habebimus $x^2 - 2mn = m^2 + n^2$, & $x^2 - 2mn = - m^2 - n^2$, quæ pertinent ad canonem æquationis quadraticæ. Potes etiam eam primum referre ad æquationem quadraticam, atque æquationes duas deducere gradus quarti hoc modo

$\overline{x^4 - 4mnx^2 + 2m^2n^2}^2 - 2m^4n^4 \begin{array}{l} - m^8 \\ - n^8 \end{array} = o$, quæ habet haſce radices

$x^4 - 4mnx^2 + 2m^2n^2 = m^4 + n^4$

$x^4 - 4mnx^2 + 2m^2n^2 = - m^4 - n^4$, quæ ex canone æquationis quartæ tractantur.

Ad æquationem gradus noni inveniendam eadem methodo utere, atque hanc obtinebis

$x^9 - 9mnx^7 + 27m^2n^2x^5 - 30m^3n^3x^3 + 9m^4n^4x \begin{array}{l} - m^9 \\ - n^9 \end{array} = o$, cujus radix una eſt $x = m + n$.

Hanc per æquationem gradus tertii reſolves, ſi hoc pacto diſtribuas $\overline{x^3 - 3mnx}^3 - 3m^3n^3 . \overline{x^3 - 3mnx} \begin{array}{l} - m^9 \\ - n^9 \end{array} = o$, cujus radix una erit $x^3 - 3mnx = m^3 + n^3$, quæ item pertinet ad noſtram gradus tertii, & habet radicem $x = m + n$.

Mirabuntur fortaſſe nonnulli, me uſque ad æquationem gradus noni methodum produxiſſe, quæ cæteroquin non videtur difficilis intellectu. Verum hoc mihi maxime neceſſarium viſum eſt, ut eas, quibus æquationes noſtræ præditæ ſunt, conditiones determinarem. Quiſque videt, æquationes viduatas ſecundo termino carere ſimiliter terminis quarto, ſexto, aliiſque tenentibus ſedes pares. Quare æquatio gradus imparis nullum habebit terminum, in quo x obtineat poteſtatem parem; contra in æquationibus paribus nullus erit terminus, in quo x teneat imparem dimenſionem. Ultimus terminus communis omnibus eſt $- m^p - n^p$: p eſt expo-

ponens maximum incognitæ x. Præterea in æquationibus paribus adeſt terminus $2m^{\frac{p}{2}} n^{\frac{p}{2}}$, qui cenſendus eſt coefficiens quantitatis x^0.

Termini, qui exiſtunt in æquatione, ſi excipias m^p, n^p, quibus ſemper ſignum — præfigitur, ſigna habent alternantia. Quapropter in æquationibus paribus termino $2m^{\frac{p}{2}} n^{\frac{p}{2}}$ præfigendum erit ſignum +, ſi p ſit numerus pariter par, ideſt ex hac ſerie 4, 8, 12, 16 ec.: contra ſcribendum erit —, ſi p ſit numerus impariter par, nimirum ex ſerie 2, 6, 10, 14 ec. In coefficientibus habetur gradatim mn, m^2n^2, m^3n^3 ec. Verum numeri his præfigendi non ita facile inveniuntur, ſi excipias illum, qui multiplicat mn, quem conſtat eſſe ſemper $= p$. Ut ceteros inveniam, ex octo illis caſibus, quos ſupra tractavi, efformo tabulam hoc modo.

In primo ordine horizontali colloco mn, m^2n^2, m^3n^3 ec., quibus numeri qui quæruntur ſunt præfigendi. In prima columna verticali, quæ eſt ad ſiniſtram, numeris romanis exprimo gradum æquationis, cui numeri, qui ſequuntur, conveniunt. Scribo numeros, qui in octo caſibus conſideratis inventi ſunt, non omiſſo 2 in æquationibus paribus, qui ducendus eſt in $m^{\frac{p}{2}} n^{\frac{p}{2}} x^0$.

Si perpendo columnam verticalem ſubjectam mn, video, eam eſſe ſeriem arithmeticam creſcentem per unitatem, ejuſque terminos ſemper æquales eſſe numeris gradum æquationis indicantibus. Quare produci poterit nullo negotio addendo cuilibet numero unitatem. Quilibet numerus ejus columnæ, quæ ſubeſt m^2n^2, eſt ſumma cum numeri, qui ſupra ipſum poſitus eſt in eadem columna, tum ejus, qui in columna proxima ad ſiniſtram poſita per duas ſedes ſuperior eſt. Ita in gradu quinto numerus quæſitus $= 2 + 3$; in gradu ſexto $= 5 + 4$; in gradu ſeptimo $= 9 + 5$, atque ita deinceps. Hac autem ratione in altioribus gradibus hanc columnam ſum proſequutus. Similis lex valet in omnibus aliis columnis. Quilibet enim numerus eſt æqualis numero ſuperiori ejuſdem columnæ, & numero antecedentis columnæ, qui reſpondet gradui per binarium minori. Ex hac methodo efformavi etiam in gradibus ſuperioribus tabulam, quam tibi exhibeo, quæ nullo negotio pro-

produci poteſt quouſque libuerit. Ex hac autem tabula æquationem cujuſcumque gradus efformabis, cujus radix una erit $= m + n$; quam æquationem deinceps canonicam appellabimus.

Antequam ad uſum venio, hoc unice advertere oportet, æquationes illas, in quibus exponens maximum incognitæ eſt numerus primus, nullo modo reſolvi ope æquationum graduum inferiorum. Verum ſi exponens maximum ſit numerus compoſitus, æquationes abſolvuntur per multiplicem reſolutionem æquationum, quarum gradus indicantur a numeris componentibus, ut conſtat ex illis caſibus, quos ſupra tractavimus. Ita quando $8 = 2.\ 4$, æquatio canonica octavi gradus reſolvitur reſolutis duabus gradus ſecundi, & quarti, vel quia $8 = 2.\ 2.\ 2$, reſolvitur reſolutis tribus gradus ſecundi. Ita æquatio gradus noni reſolvitur reſolutis duabus gradus tertii, quum $9 = 3.\ 3$. Hac autem de cauſa dixi antea, methodum hanc utilitatem habere in omnibus æquationibus, ſed præcipue in illis, quarum gradus exprimitur a numero primo.

Formularum, quas canonicas vocavimus, uſus poſtremo declarandus eſt. Æquatio quælibet cujuſcumque gradus, quæ careat terminis omnibus in ſedibus paribus excepto ultimo, & quæ terminorum exiſtentium coefficientes proportionales habeat terminis mn, $m^2 n^2$, $m^3 n^3$ ec. multiplicatis per numeros noſtræ tabulæ gradui æquationis convenientes, hæc inquam æquatio recipiet radicem ſimilem radici æquationis cubicæ. Radix autem hæc invenitur per collationem æquationis datæ cum æquatione canonica.

Ut methodum declaremus, exordiamur ab æquatione gradus ſecundi. Sit propoſita æquatio $x^2 \pm 2a - b = o$. Confer hanc cum canonica, & invenies $\pm a = - mn$, $- b = - m^2 - n^2$: atqui ex prima erit ſemper $\frac{a^2}{m^2} = n^2$: Ergo $- b = - m^2 - \frac{a^2}{m^2}$, qua reducta obtinemus $m^4 - bm^2 = - a^2$, & addito dimidii coefficientis quadrato $m^4 - bm^4 + \frac{bb}{4} = \frac{bb}{4} - a^2$, extractaque radice $m^2 - \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{bb}{4} - aa}$, ſive $m = \sqrt{+ \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{bb}{4} - aa}}$. Eandem prorſus formulam invenies pro valore n. Verum quum duplex adſit ſignum in prima radice extracta, ſigno $+$ ad valorem m, ſigno $-$ ad valorem n utemur: quod ubique fieri poſſe conſtabit. Quare fiet $m = \sqrt{+ \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - aa}}$, $n = \sqrt{+ \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - aa}}$.

Quoniam radix quadrata unitatis eſt duplex, nempe $+1$, -1, idcirco cum m, tum n duplicem habebit valorem. Ii autem erunt hujuſmodi, ſi ſignum radicale eam indicet, quæ reſpondet unitatis radici quadratæ $+1$.

Valores m	Valores n
$\sqrt{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-aa}}$	$\sqrt{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-aa}}$
$-\sqrt{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-aa}}$.	$-\sqrt{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-aa}}$.

Quare quatuor modis combinari poteſt m cum n. Ut omnem ambiguitatem de medio tollamus, & criterium ſtatuamus, quo combinationes utiles ab inutilibus ſecernamus; fac advertas, eos eſſe valores conjungendos, qui ſimul multiplicati exhibent $-a$, ſi in æquatione propoſita valeat ſignum ſuperius; contra conjungendos eos, qui multiplicati exhibent $+a$, ſi in æquatione valeat ſignum inferius. Ex hoc criterio ſequentes radicum valores determinavimus, quibus addidimus eos, qui oriuntur ex immediata radicis extractione.

Æquationis $xx-2a-b=0$ radices

$$x=\sqrt{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-aa}}+\sqrt{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-aa}}=\sqrt{2a+b}$$

$$x=-\sqrt{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-aa}}-\sqrt{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-aa}}=-\sqrt{2a+b}$$

Æquationis $xx+2a-b=0$ radices

$$x=\sqrt{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-aa}}-\sqrt{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-aa}}=\sqrt{-2a+b}$$

$$x=-\sqrt{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-aa}}+\sqrt{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-aa}}=-\sqrt{-2a+b}.$$

Quiſque cognoſcit, radicem eandem infinitis modis exprimi poſſe. Etenim quum ſpecies a non dependeat a ſpecie b, terminus ultimus in æquatione ita diſtribui poteſt, ut a ſit quælibet quantitas ad libitum ſumta. Sit enim æquatio $xx-g=0$. Eam ita diſtribuam $xx-2f-g+2f=0$: f autem ſumitur prout libet. Erit

$f=$

	mn	m^2n^2	m^3n^3	m^4n^4	m^5n^5	m^6n^6	m^7n^7
II	2						
III	3						
IV	4	2					
V	5	5					
VI	6	9	2				
VII	7	14	7				
VIII	8	20	16	2			
IX	9	27	30	9			
X	10	35	50	25	2		
XI	11	44	77	55	11		
XII	12	54	112	105	36	2	
XIII	13	65	156	182	91	13	
XIV	14	77	210	294	196	49	2

$f = \mp a$, $2f - g = -b$. Hiſce ſubſtitutis loco a, b in noſtris radicibus, provenient formulæ, quæ erunt diverſæ pro ſpeciei f diverſitate.

Tractatis æquationibus gradus alterius, tranſeo ad æquationes gradus tertii. Itaque ſit $x^3 - 3ax - b = o$. Confer hanc cum canonica, & invenies $-mn = -a$, $-m^3 - n^3 = -b$: quare $-m^3 - \frac{a^3}{m^3} = -b$, ſive $-a^3 = m^6 - bm^3$, quæ reſoluta dabit $\sqrt{\frac{bb}{4} - a^3} = m^3 - \frac{b}{2}$, ſive $m = \sqrt[3]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}$. Eodem prorſus calculo determinabis $n = \sqrt[3]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}$.

Quælibet radix tertia tres valores habere poteſt. Ut hos exprimamus, adverte, tres eſſe valores radicis cubicæ unitatis, nempe 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$. Quare ſi per radicale ſignum illa radix intelligatur, quæ primæ reſpondet ex tribus radicibus unitatis, ſequentes inveniemus

Valores m	Valores n
$\sqrt[3]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}$	$\sqrt[3]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}$
$\sqrt[3]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}} . \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$	$\sqrt[3]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}} . \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$
$\sqrt[3]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}} . \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$	$\sqrt[3]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}} . \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

Novem

Novem modis combinari poſſunt valores hujuſmodi. Ut inutiles rejiciamus, eos conjungemus duntaxat, qui ſimul multiplicati dant $+a$. Hcc uſurpato criterio æquationis propoſitæ radices exurgunt hujuſmodi

$$x = \sqrt[3]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}} + \sqrt[3]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}$$

$$x = \sqrt[3]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}} \,.\, \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} + \sqrt[3]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}} \,.\, \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$x = \sqrt[3]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} + a^3}} \,.\, \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} + \sqrt[3]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}} \,.\, \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Cenſeo non eſſe prætermittendum diſcrimen, quod intercedit inter æquationes gradus imparis, ac gradus paris. Nam in æquatione gradus imparis, ſi a tranſeat in negativam mutatur radix quadrata, quæ primum elicitur. Quum enim includat a elatam ad poteſtatem imparem, terminus hic erit poſitivus, ſi a ſit poſitiva, negativus, ſi a negativa ſit. Quare non eſt neceſſe diſtinguere caſus duos a poſitivæ, & a negativæ; una enim, eademque formula utriuſque radicem exhibet per ſolam mutationem ſignorum. Non ita accidit æquationibus paribus: nam vel a ſit poſitiva, vel negativa, elevata ad poteſtatem parem eodem ſigno afficitur: Quapropter per ſolam mutationem ſignorum utriuſque caſus radices obtinere non poſſumus, & neceſſarium eſt, alterum ab altero diſtinguere, & ſeparatim radices exhibere, quemadmodum præſtitimus in quadratis.

Venio ad æquationem gradus quarti, quam generatim ita expono $x^4 \pm 4ax^2 + 2aa - b = o$. Facta comparatione hujus cum canonica invenio $-mn = \pm a$, $-m^4 - n^4 = -b$, in qua eliminata ſpecie n fiet $-m^4 - \frac{a^4}{m^4} = -b$, ſive $m^8 - bm^4 = -a^4$, quæ reſoluta dabit $m^4 - \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}$, demum

$m = \sqrt[4]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}}$. Calculus idem determinabit

$n = \sqrt[4]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}}$.

Radix

Radix quarta unitatis quadrupla eſt, nempe $+1$, -1, $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$. Quare ſi ſignum radicale radicem illam deſignet, quæ reſpondet unitatis radici $+1$, hoſce inveniemus quatuor

Valores m	Valores n
$\sqrt[4]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}$	$\sqrt[4]{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}$
$-\sqrt[4]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}$	$-\sqrt[4]{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}$
$\sqrt[4]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}.\sqrt{-1}$	$\sqrt[4]{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}.\sqrt{-1}$
$-\sqrt[4]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}\sqrt{-1}$	$-\sqrt[4]{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}.\sqrt{-1}$.

Ex his valoribus m, n, qui ſimul multiplicati exhibent $-a$, radices præbebunt æquationis propoſitæ, quum valet ſignum ſuperius. Qui vero ſimul multiplicati dant $+a$, præbent radices æquationis, quum valet ſignum inferius. Radices haſce modo hoc determinatas paullo infra invenies.

Quæ dicta ſunt antea, ſatis oſtendunt æquationem propoſitam poſſe reſolvi per duplicem reſolutionem æquationis quadraticæ; eſt enim 4 numerus compoſitus ex 2. 2. Eam autem hoc pacto conſtat eſſe diſtribuendam $\overline{x^2 \pm 2a}^2 - 2a^2 - b = 0$, cujus, ſi conſideretur ut incognita $x^2 \pm 2a$, hæ ſunt radices

$$x^2 \pm 2a = \sqrt{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}} + \sqrt{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}.$$

$$x^2 \pm 2a = -\sqrt{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}} - \sqrt{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}.$$

Voca cauſa brevitatis $\sqrt{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}} + \sqrt{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}} = c$.

Radices autem utriuſque $x^2 \pm 2a - c = 0$, $x^2 \pm 2a + c = 0$, ex quadratica invenies tam pro caſu ſigni ſuperioris, quam pro

caſu

caſu ſigni inferioris. Ex his methodis quæſitarum radicum hujuſmodi expreſſiones determinavi.

Æquationis $x^4 - 4ax^2 + 2a^2 - b = o$ radices

$$x = \sqrt[4]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} + \sqrt[4]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}}$$

$$= \sqrt{\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{cc}{4} - a^2}} + \sqrt{\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{cc}{4} - a^2}}$$

$$x = -\sqrt[4]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} - \sqrt[4]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}}$$

$$= -\sqrt{\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{cc}{4} - a^2}} - \sqrt{\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{cc}{4} - a^2}}$$

$$x = \sqrt[4]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}}\,.\sqrt{-1} - \sqrt[4]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}}\,.\sqrt{-1}$$

$$= -\sqrt{-\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{cc}{4} - a^2}} - \sqrt{-\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{cc}{4} - a^2}}$$

$$x = -\sqrt[4]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}}\,.\sqrt{-1} + \sqrt[4]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}}\,.\sqrt{-1}$$

$$= \sqrt{-\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{cc}{4} - a^2}} + \sqrt{-\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{cc}{4} - a^2}}$$

Æquationis $x^4 + 4ax^2 + 2a^2 - b = o$ radices

$$x = \sqrt[4]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} - \sqrt[4]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}}$$

$$= -\sqrt{\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{cc}{4} - a^2}} + \sqrt{\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{cc}{4} - a^2}}$$

$x =$

$$x = -\sqrt[4]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}} + \sqrt[4]{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}$$
$$= \sqrt{\frac{c}{2}+\sqrt{\frac{cc}{4}-a^2}} - \sqrt{\frac{c}{2}-\sqrt{\frac{cc}{4}-a^2}}$$

$$x = \sqrt[4]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}.\sqrt{-1} - \sqrt[4]{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}.\sqrt{-1}$$
$$= -\sqrt{-\frac{c}{2}+\sqrt{\frac{cc}{4}-a^2}} + \sqrt{-\frac{c}{2}-\sqrt{\frac{cc}{4}-a^2}}$$

$$x = -\sqrt[4]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}.\sqrt{-1} + \sqrt[4]{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}.\sqrt{-1}$$
$$= \sqrt{-\frac{c}{2}+\sqrt{\frac{cc}{4}-a^2}} - \sqrt{-\frac{c}{2}-\sqrt{\frac{cc}{4}-a^2}}.$$

Si pro ſumma duarum radicum ſecundi gradus unicam radicem ſubſtituas, quæ habetur in æquatione ſecundi gradus, vel ſi propoſitam æquationem more uſitato reſolvas ad modum æquationis ſecundi gradus, alio modo multo ſimpliciori eaſdem radices exprimes; quod ſolum adnotaſſe, ſufficiet.

Ad quinti gradus æquationem progredior, quæ eſt hujuſmodi $x^5 - 5ax^3 + 5a^2 x - b = o$. Hæc comparata cum canonica præbebit æquationes duas $-mn = -a$, $-m^5 - n^5 = -b$, ex quibus elicies

$$m = \sqrt[5]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^5}}, \quad n = \sqrt[5]{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^5}}.$$

Quinque ſunt unitatis radices quintæ, nimirum 1,

$$\frac{-\sqrt{5}-1+\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4}, \quad +\frac{\sqrt{5}-1+\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4},$$
$$\frac{-\sqrt{5}-1-\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4}, \quad +\frac{\sqrt{5}-1-\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Qua de re quinque cum m, tum n valores invenientur, ex quibus illi

illi radicem propoſitæ æquationis expriment, qui ſimul multiplicati præbent $+a$. Ex hoc criterio radices determinavi: quas, ut brevioribus formulis complectar, pono m, n æquales radicibus illis, quæ reſpondent unitatis radici quintæ $+1$. Hoc ſuppoſito en tibi æquationis noſtræ radices.

$$x = m + n$$

$$x = m \cdot \frac{-\sqrt{5} - 1 + \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}}{4} + n \cdot \frac{-\sqrt{5} - 1 - \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$x = m \cdot \frac{-\sqrt{5} - 1 - \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}}{4} + n \cdot \frac{-\sqrt{5} - 1 + \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$x = m \cdot \frac{\sqrt{5} - 1 + \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}{4} + n \cdot \frac{\sqrt{5} - 1 - \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$x = m \cdot \frac{\sqrt{5} - 1 - \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}{4} + n \cdot \frac{\sqrt{5} - 1 + \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

Si æquationem gradus ſexti $x^6 \pm 6ax^4 + 9a^2x^2 \pm 2a^3 - b = 0$ comparemus cum canonica, eaſdem ut ſemper æquationes nanciſcemur, ex quibus determinabimus

$$m = \sqrt[6]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}}, \quad n = \sqrt[6]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}}.$$

Radices ſextas unitas habet ſex, nimirum

$$+1, \ -1, \ \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \ \frac{+1 - \sqrt{-3}}{2}, \ \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}, \ \frac{+1 + \sqrt{-3}}{2}.$$

Itaque ſex valores cum m, tum n habebit: atque illi conjungendi erunt, qui ſimul multiplicati dant $-a$ pro caſu ſigni ſuperioris, dant $+a$ pro caſu ſigni inferioris. Ex hoc criterio valores conjungendos determinavi, in quibus m, n eas radices indicant, quæ unitatis radici $+1$ reſpondent. Eos autem paullo infra invenies.

Duobus aliis modis docuimus ſexti gradus æquationem reſolvi poſſe: primo modo reſoluta primum æquatione cubica, deinde quadratica; ſecundo modo reſoluta primum quadratica, deinde cubica. Ad primum reſolutionis modum inſtituendum, ita diſponenda eſt æquatio $\overline{x^2 \pm 2a}^3 - 3a^2 \cdot \overline{x^2 \pm xa - b} = 0$, cujus ex æquatione cubica tres conſtat eſſe radices, ſcilicet facta

$p =$

$$p = \sqrt[3]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} + a^6}}, \ \& \ q = \sqrt[3]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} + a^6}}$$

$$x^2 \pm 2a = p + q$$

$$x^2 \pm 2a = p \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} + q \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

$$x^2 \pm 2a = p \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} + q \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}.$$ Voca primam radicem c, ſecundam $\overset{I}{c}$, tertiam $\overset{II}{c}$, & habebuntur tres æquationes quadraticæ tam pro caſu ſigni ſuperioris, quam pro caſu ſigni inferioris, quibus reſolutis orientur æquationis ſexti gradus radices ſex, quas paullo infra ponam ſecundo loco.

Ad alterius modi reſolutionem habendam oportet æquationem ita diſponere $\overline{x^3 \pm 3ax}^2 \pm 2a^3 - b = 0$, cujus radices pro caſu ſigni inferioris ſi voces $f = \sqrt{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}} + \sqrt{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}}$ erunt $x^3 - 3ax = f$, $x^3 - 3ax = -f$; pro caſu autem ſigni ſuperioris, ſi voces $g = \sqrt{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}} - \sqrt{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}}$, erunt $x^3 + 3ax = g$, $x^3 + 3ax = -g$. Quum autem ſingulæ hæ æquationes tres radices exhibeant, obtinebimus pro utroque caſu radices ſex, quæ requiruntur. Has autem tertio loco ſcribam.

Æquationis $x^6 - 6ax^4 + 9a^2x^2 - 2a^3 - b = 0$ radices

$$x = m + n = \sqrt{\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{cc}{4} - aa}} + \sqrt{\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{cc}{4} - aa}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} - a^3}} + \sqrt[3]{\frac{f}{2} - \sqrt{\frac{ff}{4} - a^3}}$$

$$x = -m - n = -\sqrt{\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{cc}{4} - aa}} - \sqrt{\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{cc}{4} - aa}} =$$

$$\sqrt[3]{-\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{fb}{4} - a^3}} - \sqrt[3]{-\frac{f}{2} - \sqrt{\frac{ff}{4} - a^3}}$$

 $x =$

$$x = m \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} + n \cdot \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \sqrt{\frac{c''}{2} + \sqrt{\frac{c''^{2}}{4} - aa}} -$$

$$\sqrt{\frac{c''}{2} - \sqrt{\frac{c''}{4} - aa}} = \sqrt[3]{\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} - a^{3}}} \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$+ \sqrt{\frac{f}{2} - \sqrt{\frac{ff}{4} - a^{3}}} \cdot \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$x = m \cdot \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} + n \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = -\sqrt{\frac{c''}{2} + \sqrt{\frac{c''^{2}}{4} - aa}}$$

$$-\sqrt{\frac{c''}{2} - \sqrt{\frac{c''^{2}}{4} - a^{2}}} = \sqrt[3]{-\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} - a^{3}}} \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$+ \sqrt[3]{-\frac{f}{2} - \sqrt{\frac{ff}{4} - a^{3}}} \cdot \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$x = m \cdot \frac{1-\sqrt{-3}}{2} + n \cdot \frac{1+\sqrt{-5}}{2} = \sqrt{\frac{c'}{2} + \sqrt{\frac{c'^{2}}{4} - aa}}$$

$$+ \sqrt{\frac{c'}{2} - \sqrt{\frac{c'^{2}}{4} - aa}} = \sqrt[3]{\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} - a^{3}}} \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{f}{2} - \sqrt{\frac{ff}{4} - a^{3}}} \cdot \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$x = m \cdot \frac{1+\sqrt{-3}}{2} + n \cdot \frac{1-\sqrt{-3}}{2} = -\sqrt{\frac{c'}{2} + \sqrt{\frac{c'^{2}}{4} - aa}}$$

$$-\sqrt{\frac{c'}{2} - \sqrt{\frac{c'^{2}}{4} - a^{2}}} = \sqrt[3]{-\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} - a^{3}}} \cdot \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$+ \sqrt[3]{-\frac{f}{2} - \sqrt{\frac{ff}{4} - a^{3}}} \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Æqua-

Æquationis $x^6 + 6ax^4 + 9a^2x^2 + 2a^3 - b = o$ radices

$$x = m - n = \sqrt{-\tfrac{c}{2} + \sqrt{\tfrac{cc}{4} - aa}} - \sqrt{-\tfrac{c}{2} - \sqrt{\tfrac{cc}{4} - aa}}$$

$$= \sqrt[3]{\tfrac{g}{2} + \sqrt{\tfrac{gg}{4} + a^3}} + \sqrt[3]{\tfrac{g}{2} - \sqrt{\tfrac{gg}{4} + a^3}}$$

$$x = -m + n = -\sqrt{-\tfrac{c}{2} + \sqrt{\tfrac{cc}{4} - aa}} + \sqrt{-\tfrac{c}{2} - \sqrt{\tfrac{cc}{4} - aa}}$$

$$= \sqrt[3]{-\tfrac{g}{2} + \sqrt{\tfrac{gg}{4} + a^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{g}{2} - \sqrt{\tfrac{gg}{4} + a^3}}$$

$$x = m \cdot \tfrac{-1 + \sqrt{-3}}{2} + n \cdot \tfrac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = \sqrt{-\tfrac{\ddot{c}}{2} + \sqrt{\tfrac{\ddot{c}^2}{4} - aa}}$$

$$- \sqrt{-\tfrac{\ddot{c}}{2} - \sqrt{\tfrac{\ddot{c}^2}{4} - a^2}} = \sqrt[3]{\tfrac{g}{2} + \sqrt{\tfrac{gg}{4} + a^3}} \cdot \tfrac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

$$+ \sqrt[3]{\tfrac{g}{2} - \sqrt{\tfrac{gg}{4} + a^3}} \cdot \tfrac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$

$$x = m \cdot \tfrac{1 + \sqrt{-3}}{2} + n \cdot \tfrac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = -\sqrt{-\tfrac{\dot{c}}{2} + \sqrt{\tfrac{\dot{c}^2}{4} - aa}}$$

$$+ \sqrt{-\tfrac{\dot{c}}{2} - \sqrt{\tfrac{\dot{c}^2}{4} - aa}} = \sqrt[3]{-\tfrac{g}{2} + \sqrt{\tfrac{gg}{4} + a^3}} \cdot \tfrac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

$$+ \sqrt[3]{-\tfrac{g}{2} - \sqrt{\tfrac{gg}{4} + a^3}} \cdot \tfrac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$

$$x = m \cdot \tfrac{-1 - \sqrt{-3}}{2} + n \cdot \tfrac{1 - \sqrt{-3}}{2} = \sqrt{-\tfrac{\dot{c}}{2} + \sqrt{\tfrac{\dot{c}^2}{4} - aa}}$$

$$- \sqrt{-\tfrac{\dot{c}}{2} - \sqrt{\tfrac{\dot{c}^2}{4} - aa}} = \sqrt[3]{\tfrac{g}{2} + \sqrt{\tfrac{gg}{4} + a^3}} \cdot \tfrac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$

$$+ \sqrt[3]{\tfrac{g}{2} - \sqrt{\tfrac{gg}{4} + a^3}} \cdot \tfrac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

$x =$

$$x = m.\frac{1-\sqrt{-3}}{2} + n.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = -\sqrt{-\frac{\ddot{c}}{2}+\sqrt{\frac{\ddot{c}^2}{4}-aa}}$$
$$+\sqrt{-\frac{\ddot{c}}{2}-\sqrt{\frac{\ddot{c}^2}{4}-a^2}} = \sqrt[3]{-\frac{g}{2}+\sqrt{\frac{gg}{4}+a^3}}.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$
$$+\sqrt[3]{-\frac{g}{2}-\sqrt{\frac{gg}{4}+a^3}}.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Ex hiſce exemplis, quæ diligenter perſequutus ſunt, perſpicuum eſt, qua methodo altiores æquationes ſint pertractandæ. In æquationibus autem gradus imparis $x^p - pa^{p-2}$ ec. $-b=o$ invenies ſemper radicem hanc

$$x = \sqrt[p]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}} - \sqrt[p]{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}},$$ in qua

radicalia ſigna eas exprimunt radices, quæ reſpondent unitatis radici $p^{eſima}$ $+1$. In æquationibus paribus, quæ ſecundum terminum affectum habent ſigno $-$, ut $x^p - p^a x^{p-2}$ ec. $-b=o$,

$$x = \sqrt[p]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}} + \sqrt[p]{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}}$$

$$x = -\sqrt{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}} - \sqrt[p]{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}}.$$

Quæ vero ſecundum terminum habent affectum ſigno $+$, ut $x^p + pax^{p-2}$ ec. $-b=o$, duas haſce radices recipiunt

$$x = \sqrt[p]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}} - \sqrt[p]{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}}$$

$$x = -\sqrt[p]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}} + \sqrt[p]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}},$$ in quibus

omnibus eæ radices a ſignis radicalibus deſignantur, quæ reſpondent unitatis radici $p^{eſima}$ $+1$. Quiſque videt, harum radicum inveniri poſſe formulas alias, ſi p ſit numerus compoſitus, nempe

reſol-

reſolvendo plures æquationes eorum graduum, qui indicantur a numeris componentibus. Sed hac ratione formulæ longiſſimæ fiunt.

Ad alias æquationis radices eruendas neceſſe eſſet, cognoſcere alias radices $p^{\textit{eſimas}}$ unitatis; deinde harum ſingulas multiplicare tum per $\sqrt[p]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}}$, tum per $\sqrt[p]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}}$: demum illæ conjungendæ erunt, quæ ſimul multiplicatæ exhibent $+a$, ſi p ſit impar; vel poſito p pari, ſi in ſecundo termino inſit $+$, quæ exhibent $-a$, contra quæ dant $+a$, ſi in ſecundo termino inſit $-$. Quibus rite perſpectis ſatis conſtat, quænam ſint æquationes, cujus radix ad minimum una poteſt exprimi ad modum radicis cubicæ cardanicæ.

Quandoquidem in æquationibus gradus paris, nullus in incognita x adeſt exponens impar, videbam, facto $xx = z$, oriri æquationem gradus imparis omnibus terminis inſtructam. Quare ſuſpicabar, ex hac methodo novas æquationes gradus imparis reſolutionem accipere. Sed quum rem ad calculum revocavi, cognovi æquationem oriri, quæ, ſi ſpolietur ſecundo termino, caret quarto, ſexto, aliiſque tenentibus ſedes pares. Quare æquatio nulla reſolvi poteſt per hanc methodum, quæ prius non eſſet in poteſtate. Hoc autem uno aut altero exemplo inverſo calculo oſtendam.

Sit æquatio tertii gradus $z^3 - 3a^2 z - b = o$, quæ ad noſtram canonicam pertinet. Ponatur $x^2 \pm 2a = z$, factaque ſubſtitutione proveniet $x^6 \pm 6ax^4 + 9a^2 x \pm 2a^3 - b = o$, quæ eſt noſtra canonica gradus ſexti. Tertii gradus æquatio prædita eſt tribus radicibus

$$z = \sqrt[3]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^6}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^6}}$$

$$z = \sqrt[3]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^6}} \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} + \sqrt[3]{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^6}} \cdot \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$z = \sqrt[3]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^0}} \cdot \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} + \sqrt[3]{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^6}} \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

Qua-

Quapropter erit

$$x^2 = \sqrt[3]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{2} - a^6}} \mp 2a + \sqrt[3]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}}$$

$$x^2 = \sqrt[3]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}} \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \mp 2a$$
$$+ \sqrt[3]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}} \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

$$x^2 = \sqrt[3]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}} \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \mp 2a$$
$$+ \sqrt[3]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}} \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$

Singulæ hæ formulæ quadratum continent completum, cujus radices extrahi poſſunt. His autem extractis habebuntur ſex radices æquationis ſexti gradus tum pro caſu ſigni ſuperioris, quam pro caſu ſigni inferioris. Eas autem in utroque caſu exhibeo

Æquationis $x^6 - 6ax^4 + 9a^2x^2 - 2a^3 - b = o$ radices

$$x = \pm\sqrt[6]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}} \pm \sqrt[6]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}}$$

$$x = \pm\sqrt[6]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}} \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$
$$\pm\sqrt[6]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}} \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$

$$x = \pm\sqrt[6]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}} \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$
$$\pm\sqrt[6]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}} \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

Singulæ hæ formulæ duas radices præbent, quarum una a ſignis ſuperioribus, altera ab inferioribus indicatur.

Æqua-

Æquationis $x^6 + 6ax^4 + 9a^2x^2 + 2a^3 - b = 0$ radices

$$x = \pm\sqrt[6]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^6}} \pm \sqrt[6]{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^6}}$$

$$x = \pm\sqrt[6]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^6}}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$\mp\sqrt[6]{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^6}}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$x = \pm\sqrt[6]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^6}}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$\mp\sqrt[6]{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^6}}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Duas ut ſupra in formulis ſingulis radices habes. Hæ vero radices eædem ſunt cum illis, quas antea invenimus.

Inveniamus etiam hac ratione radices æquationis decimi gradus. Itaque ſit æquatio gradus quinti $z^5 - 5a^2z^3 + 5a^4z - b = 0$, quæ, ut cuique clarum eſt, in noſtra canonica continetur. Pono $x^2 \pm 2a = z$, & facta ſubſtitutione invenio $x^{10} \pm 10ax^8 + 35a^2x^6 \pm 50a^3x^4 + 25a^4x^2 \pm 2a^5 - b = 0$, quæ eadem eſt cum æquatione noſtra canonica gradus decimi.

Si voces $m = \sqrt[5]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{2}-a^{10}}}$, & $n = \sqrt{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^{10}}}$, ex reſolutione æquationis quinti gradus invenies

$$x^2 = m \pm 2a + n$$

$$x^2 = m\cdot\frac{-\sqrt{5}-1+\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4} \pm 2a + n\cdot\frac{-\sqrt{5}-1-\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$x^2 = m\cdot\frac{-\sqrt{5}-1-\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4} \pm 2a + n\cdot\frac{-\sqrt{5}-1+\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$x^2 = m\cdot\frac{\sqrt{5}-1+\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4} \pm 2a + n\cdot\frac{\sqrt{5}-1-\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$x^2 = m \cdot \frac{\sqrt{5} - 1 - \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}{4} \pm 2a + n \cdot \frac{\sqrt{5} - 1 + \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

Formulæ iſtæ omnes habent quadratum completum, cujus radices extrahere licet in utraque hypotheſi ſigni ſuperioris, & inferioris. Quare æquationis

$$x^{10} - 10ax^8 + 35a^2x^6 - 50a^3x^4 + 25a^4x^2 - 2a^5 - b = 0$$

hujuſmodi erunt radices

$$x = \pm\sqrt{m} \pm \sqrt{n}$$

$$x = \pm\sqrt{m \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{-5-\sqrt{5}}{2}}} \pm \sqrt{n \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{-5-\sqrt{5}}{2}}}$$

$$x = \pm\sqrt{m \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{-5-\sqrt{5}}{2}}} \pm \sqrt{n \, \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{-5-\sqrt{5}}{2}}}$$

$$x = \pm\sqrt{m \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{-5+\sqrt{5}}{2}}} \pm \sqrt{n \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{-5+\sqrt{5}}{2}}}$$

$$x = \pm\sqrt{m \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{-5+\sqrt{5}}{2}}} \pm \sqrt{n \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\tfrac{-5+\sqrt{5}}{2}}}.$$

Æquatio vero

$$x^{10} + 10ax^8 + 35a^2x^6 + 50a^3x^4 + 25a^4x^2 + 2a^5 - b = 0$$

haſce continet radices

$$x = \pm\sqrt{m} \mp \sqrt{n}$$

$$x = \pm\sqrt{m \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{-5-\sqrt{5}}{2}}} \mp \sqrt{n \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{-5-\sqrt{5}}{2}}}$$

$$x = \pm\sqrt{m \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{-5-\sqrt{5}}{2}}} \mp \sqrt{n \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{-5-\sqrt{5}}{2}}}$$

$$x = \pm\sqrt{m \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{-5+\sqrt{5}}{2}}} \mp \sqrt{n \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{-5+\sqrt{5}}{2}}}$$

$x =$

$$x = \pm\sqrt{m}\,.\,\overline{\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{-5+\sqrt{5}}{2}}} + \sqrt{n}\,.\,\overline{\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{-5+\sqrt{5}}{2}}}.$$

Singulæ formulæ duas exhibent radices, quarum una a ſignis ſuperioribus, alia ab inferioribus indicatur. Ex his autem facile colliges, æquationes gradus paris, tametſi in æquationes gradus inferioris converti poſſint, tamen nullius æquationis reſolutionem præbere, quæ ex noſtra methodo non eſſet in poteſtate.

De earumdem Radicum conſtructione.

PARS ALTERA.

UT eam, quam radices analytice expoſitæ recipiunt, conſtructionem patefaciam, neceſſe eſt, ut prius de ſinibus, & coſinibus cum circularibus, tum hyperbolicis pauca dicam. Si in circulo, cujus radius C A (*Fig.* 2) accipiatur arcus quilibet A F, & ex puncto F demittatur in C A normalis F D, notum eſt, radium, ſeu ſemiaxem C A appellari ſinum totum, rectam F D ſinum arcus A F, & interceptam C D ejus coſinum. Quum autem ſector A C F æquet dimidium rectanguli ex ſinu toto & arcu A F, conſtat, duplum ſectoris A C F diviſi per ſinum totum arcui A F eſſe æqualem. Itaque F D vocari poteſt ſinus, C D coſinus dupli ſectoris diviſi per ſinum totum.

Per analogiam ſinus, & coſinus ex circulo traduci poſſunt ad hyperbolam æquilateram. Deſcribatur hyperbola æquilatera, cujus ſemiaxis C A (*Fig.* 1) radio circuli ſit æqualis, & ex centro C ad punctum quodlibet F in curva poſitum, agatur recta C F, & ex eodem puncto F demittatur F D in axem C A productum. Si vocetur C A ſinus totus hyperbolicus, F D vocari poterit ſinus hyperbolicus, C D coſinus dupli ſectoris A C F diviſi per ſinum totum. Hæ ſunt nominum definitiones.

Sed non ita facile eſt in praxi multiplicare, atque dividere ſectores hyperbolicos, quemadmodum circulares, qui arcubus circuli, a quibus clauduntur, ſunt ſemper proportionales. Quamobrem methodus aperienda eſt, qua idipſum per praxim non difficilem efficiamus. Agatur aſſymptoton hyperbolæ C K, faciens, ut notum eſt, cum axe C A angulum ſemirectum, & ex punctis A, F demittantur in aſſymptoton A K, F H. Quoniam ex hyperbolæ proprietate rect. A K C = rect. F H C, etiam triangulum A K C = triang. F H C: ſunt enim hæc triangula rectangulorum dimidia: ergo dempto communi triangulo C O K reliquum erit triang. A O C æquale trapezio O K H F. Addatur utrique parti triangulum mixtilineum A O F, & orietur ſector C A F æqualis ſpatio hyperbolico A K H F. Ex hac demonſtratione aperte conſtat, hyperbolicos ſectores æquales eſſe ſpatiis, quæ continentur inter A K, ejuſque parallelam, aſſymptoton, & curvam; & illorum ſummas, ac diffe-

feren-

ferentias æquales eſſe ſummis iſtorum, ac differentiis. Quare qui ſpatia hæc hyperbolica noverit multiplicare, atque dividere, idipſum nullo negotio præſtabit etiam in ſectoribus hyperbolicis.

Si in aſſymptoto fiant ut CK : CG : : CH : CP, & agantur ordinatæ GE, HF, PN, nemo unus eſt, qui neſciat, fore ſpatium AKGE = FHPN. Quare, ſi in aſſymptoto accipiatur ſeries geometrice proportionalium, ſpatia hiſce abſciſſis reſpondentia creſcent in continua arithmetica proportione. Itaque ſuppoſita inventione quantitatum proportionalium nihil facilius eſt, quam prædicta ſpatia multiplicare, atque dividere. Sint duo ſpatia AKGE, AKHF, quibus unicum æquale inveniendum ſit. Fac ut CK : CG : : CH : CP, & age ordinatam PN, idipſum ſpatium, quod quæritur, eſt AKPN. Inveniendum ſit ſpatium, quod æquet differentiam AKPN, AKHF. Pone ut CH : CP : : CK : CG, & age GE, ſpatium AKGE prædictorum ſpatiorum æquabit differentiam.

Notiſſima ſunt corollaria, quæ ex his principiis deſcendunt, neque ad ulteriora feſtinantes fas eſt in his immorari. Hoc ſolum attingam. Poſito m numero integro, ut habeas ſpatium æquale m . AKGE, poſt CK, & CG tot continuo proportionales accipe, quot ſunt unitates in $m - 1$, & ſpatium ultimæ reſpondens idipſum eſt, quod poſtulatur. Contra ſi cupias ſpatium $= \frac{AKPN}{m}$, ſume inter CK, & CP tot medias proportionales, quot ſunt unitates in $m - 1$, & ſpatium primæ reſpondens erit pars $m^{eſima}$ ſpatii AKPN. Generalius ſi velis determinare ſpatium $\frac{n}{m}$. AKPN, ſume tot medias proportionales, quot unitates inſunt in $m - 1$, & harum mediarum ſume eam, quæ eſt in ſede $n^{eſima}$, & ſpatium huic reſpondens id ipſum eſt, quod quæris.

Quæ dicta ſunt de ſpatiis clauſis ab ordinatis aſſymptoto, transfer ad ſectores hyperbolicos eiſdem æquales.

Quoniam termini ſeriei geometricæ vocantur numeri, termini reſpondentes ſeriei arithmeticæ vocantur logarithmi, ſi numeri accipiantur in hyperbolæ aſſymptoto, ſpatia reſpondentia, vel ſectoris hyperbolici diviſi per quamlibet conſtantem ſpectari poſſunt ut logarithmi. Verum quid vetat, quominus conſtantem, per quam dividitur ſector, ita determinemus, ut logarithmus reſpondeat ſectori hyperbolico, quemadmodum arcus reſpondet ſectori circulari? Certe hac ratione melius fiet ſatis analogiæ. Itaque quemadmodum arcus æqualis eſt circulari ſectori diviſo per dimidium ſinus

to-

totius: ita logarithmum ponemus æqualem ſectori hyperbolico diviſo per dimidium ſinus totius. Deinceps autem ſicut ſumimus in circulo ſinus, & coſinus arcuum, quos ſinus, & coſinus circulares vocamus, ita in hyperbola ſumemus ſinus, & coſinus logarithmorum, quos ſinus, & coſinus hyperbolicos appellabimus. Logarithmos vero in hyperbola perinde deſignabimus, ac arcus in circulo.

Sed paucis adverte, quænam futuræ ſint conditiones ejus, quo utimur, logarithmorum ſyſtematis. Vocato ſinu toto $CA = r$, erit $CK = \frac{r}{\sqrt{2}}$ qui erit protonumerus, ſcilicet numerus ille, cujus logarithmus $= o$. Subtangens autem conſtans ſyſtematis invenitur eſſe $= r$, ſcilicet ſinui toti. Hos autem logarithmos, quando analogi ſunt arcubus circularibus, vocabo logarithmos analogos.

His prænotatis ſinuum & coſinuum proprietates perſequamur. Sinus, & coſinus hyperbolicos per hæc ſigna notabo Sh, Ch. Primo datis duorum logarithmorum φ, π ſinibus, & coſinibus quæritur ſinus, & coſinus logarithmi $\varphi + \pi$. Sit $CB = Ch.\varphi$, $BE = Sh.\varphi$, $CD = Ch.\pi$, $DF = Sh.\pi$. Supponatur $CM = Ch.\overline{\varphi + \pi}$, & $MN = Sh.\overline{\varphi + \pi}$. BE, DF, MN producantur, & concurrant cum aſſymptoto in punctis I, L, Q. Ex punctis E, F, N agantur aſſymptoto normales EG, FH, NP. Quum propter angulum ſemirectum ACK ſit $BI = CB$, $DL = CD$, $MQ = CM$, conſtat fore $EI = Ch.\varphi - Sh.\varphi$, $FL = Ch.\pi - Sh.\pi$, $NQ = Ch.\overline{\varphi + \pi} - Sh.\overline{\varphi + \pi}$. Deinde quando vocata eſt $CA = r$, erit $CK = \frac{r}{\sqrt{2}}$. Item $GI = \frac{Ch.\varphi - Sh.\varphi}{\sqrt{2}}$, $HL = \frac{Ch.\pi - Sh.\pi}{\sqrt{2}}$, & $PQ = \frac{Ch.\overline{\varphi + \pi} - Sh.\overline{\varphi + \pi}}{\sqrt{2}}$. Poſtremo $CI = \sqrt{2}.Ch.\varphi$, $CL = \sqrt{2}.Ch.\pi$, & $CQ = \sqrt{2}.Ch.\overline{\varphi + \pi}$. Quapropter $CG = \sqrt{2}.Ch.\varphi - \frac{Ch.\varphi + Sh.\varphi}{\sqrt{2}} = \frac{Ch.\varphi + Sh.\varphi}{\sqrt{2}}$, $CH = \frac{Ch.\pi + Sh.\pi}{\sqrt{2}}$, $CP = \frac{Ch.\overline{\varphi + \pi} + Sh.\overline{\varphi + \pi}}{\sqrt{2}}$; atqui ex ſupra demonſtratis debet eſſe $CK : CG :: CH : CP$: Igitur $\frac{r}{\sqrt{2}} : \frac{Ch.\varphi + Sh.\varphi}{\sqrt{2}} :: \frac{Ch.\pi + Sh.\pi}{\sqrt{2}} : \frac{Ch.\overline{\varphi + \pi} + Sh.\overline{\varphi + \pi}}{\sqrt{2}}$,

& facto

& facto tranſitu ab analogia ad æqualitatem fiet $Cb.\overline{\varphi+\pi}+Sb.\overline{\varphi+\pi}=\frac{\overline{Cb.\varphi+Sb.\varphi}.\overline{Cb.\pi+Sb.\pi}}{r}$.

Invento hoc primo theoremate aliud nanciſcemur ope localis æquationis hyperbolæ, nempe $\overline{Cb}^2-\overline{Sb}^2=rr$: Ergo $\overline{Cb.+Sb}.\overline{Cb.-Sb.}=rr$, ſive $Cb.+Sb.=\frac{rr}{Cb.-Sb.}$. Quapropter valoribus ſubſtitutis habebimus $\frac{rr}{Cb.\overline{\varphi+\pi}-Sb.\overline{\varphi+\pi}}=\frac{r^3}{\overline{Cb.\varphi-Sb.\varphi}.\overline{Cb.\pi-Sb.\pi}}$, ſive $Cb.\overline{\varphi+\pi}-Sb.\overline{\varphi+\pi}=\frac{\overline{Cb.\varphi-Sb.\varphi}.\overline{Cb.\pi-Sb.\pi}}{r}$: quod eſt theorema alterum.

Si alterius theorematis æquationem primum addas, deinde demas ab æquatione primi theorematis obtinebis $Cb.\overline{\varphi+\pi}=\frac{\overline{Cb.\varphi+Sb.\varphi}.\overline{Cb\pi+Sb.\pi}+\overline{Cb.\varphi-Sb\varphi}.\overline{Cb.\pi-Sb.\pi}}{2r}=\frac{Cb.\varphi.Cb\pi+Sb.\varphi.Sb.\pi}{r}$; $Sb.\overline{\varphi+\pi}=\frac{\overline{Cb.\varphi+Sb\varphi}.\overline{Cb.\pi+Sb.\pi}-(\overline{Cb.\varphi-Sb\varphi}.\overline{Cb.\pi-Sb.\pi}}{2r}=\frac{Cb.\varphi.Sb.\pi+Cb.\pi.Sb.\varphi}{r}$. Q. E. Inv.

Quod ſi quæras ſinus, & coſinus differentiæ duorum logarithmorum φ, π, nempe $Cb.\overline{\varphi-\pi}$, $Sb.\overline{\varphi-\pi}$, eædem formulæ valebunt, dummodo pro $Cb.\pi$, $Sb.\pi$ ponas $Cb.-\pi$, $Sb.-\pi$. Verum ut valores habeas per datos $Cb.\pi$, $Sb.\pi$, adverte $Cb.-\pi=Cb.\pi$, & $Sb.-\pi=-Sb.\pi$. Quare nulla alia formulis mutatio facienda erit, niſi ſignum mutare ante $Sb.\pi$.

A ſinibus, & coſinibus hyperbolicis ad circulares gradum faciamus. In circulo, cujus ſinus totus, ſeu radius $CA=r$, capiatur arcus $AE=\varphi$, & arcus $AF=\pi$; tum arcus $AN=AE+AF$

$+ AF = \varphi + \pi$. Ex datis ſinibus, & coſinibus arcuum φ, π, quæritur ſinus, & coſinus arcus $\varphi + \pi$. Agatur radius CF, cui ſit normalis NQ. Conſtat $CQ = Cc.\varphi$, & $NQ = Sc.\varphi$: nam per has notas coſinus, & ſinus circulares deſigno. Quandoquidem eſt $CD : CF :: CM : CO$ erit analytice $Cc.\pi : r :: Cc.\overline{\varphi + \pi} : CO = \frac{r.Cc.\overline{\varphi + \pi}}{Cc.\pi}$: Ergo $QO = Cc.\varphi - \frac{r.Cc.\overline{\varphi + \pi}}{Cc.\pi}$; atqui $QN : QO :: CD . DF$, ſive $Sc.\varphi : Cc.\varphi - \frac{r.Cc.\overline{\varphi + \pi}}{Cc.\pi} :: Cc.\pi : Sc.\pi$, ſive $Sc.\varphi . Sc.\pi = Cc.\varphi . Cc.\pi - r. Cc.\overline{\varphi + \pi}$, & reducta æquatione $Cc.\overline{\varphi + \pi} = \frac{Cc.\varphi . Cc.\pi - Sc.\varphi . Sc.\pi}{r} =$

$$\frac{\overline{Cc.\varphi + \sqrt{-1}.Sc.\varphi}.\overline{Cc.\pi + \sqrt{-1}.Sc.\pi} + \overline{Cc.\varphi - \sqrt{-1}.Sc.\varphi}.\overline{Cc.\pi - \sqrt{-1}\,Sc.\pi}}{2r}.$$

Ad inveniendum ſinum ita inſtitue analyſim. Ob ſimilitudinem triangulorum habetur hæc proportio $CD : DF :: CM : MO$, in qua ſi pro $CM = Cc.\overline{\varphi + \pi}$ ponatur valor paullo ante inventus, obtinetur $Cc.\pi : Sc.\pi :: \frac{Cc.\varphi . Cc.\pi - Sc.\varphi . Sc.\pi}{r} : MO$.

Itaque $MO = \frac{Cc.\varphi . Sc.\pi}{r} - \frac{Sc.\varphi . \overline{Sc.\pi}^2}{r . Cc.\pi}$: Igitur $NO = Sc.\overline{\varphi + \pi} - \frac{Cc.\varphi . Sc.\pi}{r} + \frac{Sc.\varphi . \overline{Sc.\pi}^2}{r . Cc.\pi}$. Atqui valet hæc proportio $NQ : NO :: CD : CF$, & analytice $Sc.\varphi : Sc.\overline{\varphi + \pi} - \frac{Cc.\varphi . Sc.\pi}{r} + \frac{Sc.\varphi . \overline{Sc.\pi}^2}{r . Cc.\pi} :: Cc.\pi : r$: Ergo facta æquatione $r. Sc.\varphi = Cc.\pi . Sc.\overline{\varphi + \pi} - \frac{Cc.\varphi . Cc.\pi . Sc.\pi + Sc.\varphi . \overline{Sc.\pi}^2}{r}$, ſive æquatione reducta $\frac{r^2 . Sc.\varphi - Sc.\varphi . \overline{Sc.\pi}^2 + Cc.\varphi . Cc.\pi . Sc.\pi}{r . Cc.\pi} = Sc.\overline{\varphi + \pi}$. Atqui ex circuli æquatione locali $r^2 - \overline{Sc.\pi}^2 =$

Cc.

$\overline{Cc.\pi}^2$: Ergo $Sc.\overline{\varphi+\pi} = \frac{Sc.\varphi.Cc.\pi + Cc.\varphi.Sc.\pi}{r} =$

$$\frac{\overline{Cc.\varphi+\sqrt{-1}.Sc.\varphi}.\overline{Cc.\pi+\sqrt{-1}.Sc.\pi} - [\overline{Cc.\varphi-\sqrt{-1}.Sc.\varphi}.\overline{Cc.\pi-\sqrt{-1}.Sc.\pi}}{2r\sqrt{-1}}$$

Si poſtremam hanc æquationem exprimentem $Sc.\overline{\varphi+\pi}$ multiplicatam per $\sqrt{-1}$ primum addas æquationi exhibenti $Cc.\overline{\varphi+\pi}$, deinde ab eadem detrahas, duo hæc theoremata nanciſceris.

$$Cc.\overline{\varphi+\pi} + Sc.\overline{\varphi+\pi}.\sqrt{-1} = \frac{\overline{Cc.\varphi+\sqrt{-1}.Sc.\varphi}.\overline{Cc.\pi+\sqrt{-1}.Sc.\pi}}{r}$$

$$Cc.\overline{\varphi+\pi} - Sc.\overline{\varphi+\pi}.\sqrt{-1} = \frac{\overline{Cc.\varphi-\sqrt{-1}.Sc\varphi}.\overline{Cc.\pi-\sqrt{-1}.Sc.\pi}}{r}.$$

Si quæras ſinum, & coſinum arcus $\varphi-\pi$, ſatis erit, in ſuperioribus formulis mutare ſignum $Sc.\pi$, reliquis non mutatis. Ratio, quæ tradita eſt in quantitatibus hyperbolicis, valet etiam in circularibus.

Formulæ quatuor, quas dixi quatuor theoremata exhibere, ingentem præſtant uſum in multiplicandis, ac dividendis cum logarithmis, tum arcubus circularibus. Etenim poſito $\varphi=\pi$ proveniunt quatuor æquationes

$$Ch.2\varphi + Sh.2\varphi = \frac{\overline{Ch.\varphi+Sh.\varphi}^2}{r}$$

$$Ch.2\varphi - Sh.2\varphi = \frac{\overline{Ch.\varphi-Sh.\varphi}^2}{r}$$

$$Cc.2\varphi + \sqrt{-1}.Sc.2\varphi = \frac{\overline{Cc.\varphi+\sqrt{-1}.Sc.\varphi}^2}{r}$$

$$Cc.2\varphi - \sqrt{-1}.Sc.2\varphi = \frac{\overline{Cc.\varphi-\sqrt{-1}.Sc.\varphi}^2}{r}.$$

Fiat æquationum additio, ac ſubtractio, quam ſignorum ambiguitas videtur poſtulare

$$Ch.2\varphi = \frac{\overline{Ch.\varphi+Sh.\varphi}^2 + \overline{Ch.\varphi-Sh.\varphi}^2}{2r}$$

$$Sb.2\varphi = \frac{\overline{Ch.\varphi + Sb.\varphi}^{2} - [\overline{Ch.\varphi - Sb.\varphi}^{2}}{2r}$$

$$Cc.2\varphi = \frac{\overline{Cc.\varphi + \sqrt{-1}.Sc\varphi}^{2} + \overline{Cc.\varphi - \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{2}}{2r}$$

$$\sqrt{-1}.Sc.2\varphi = \frac{\overline{Cc.\varphi + \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{2} - [\overline{Cc.\varphi - \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{2}}{2r}.$$

Deinde fiat æquationum additio, ac ſubtractio, poſtquam extracta fuerit radix quadrata, & invenietur

$$\frac{\overline{Ch.2\varphi + Sb.2\varphi}^{\frac{1}{2}} + \overline{Ch.2\varphi - Sb.2\varphi}^{\frac{1}{2}}}{\overline{2r}^{\frac{1}{2}}} = Cb.\varphi$$

$$\frac{\overline{Ch.2\varphi + Sb.2\varphi}^{\frac{1}{2}} - [\overline{Ch.2\varphi - Sb.2\varphi}^{\frac{1}{2}}}{\overline{2r}^{\frac{1}{2}}} = Sb.\varphi$$

$$\frac{\overline{Cc.2\varphi + \sqrt{-1}.Sc.2\varphi}^{\frac{1}{2}} + \overline{Cc.2\varphi - \sqrt{-1}.Sc.2\varphi}^{\frac{1}{2}}}{\overline{2r}^{\frac{1}{2}}} = Cc.\varphi$$

$$\frac{\overline{Cc.2\varphi + \sqrt{-1}.Sc.2\varphi}^{\frac{1}{2}} - [\overline{Cc.2\varphi - \sqrt{-1}.Sc.2\varphi}^{\frac{1}{2}}}{\overline{2r}^{\frac{1}{2}}} = Sc.\varphi\sqrt{-1}.$$

Duobus logarithmis, aut arcubus circularibus φ, π tertius μ addatur, & theoremata præbebunt æquationes

$$Ch.\overline{\varphi+\pi+\mu} + Sb.\overline{\varphi+\pi+\mu} = \frac{\overline{Ch.\overline{\varphi+\pi} + Sb.\overline{\varphi+\pi}}.\overline{Ch.\mu + Sb.\mu}}{r}$$

$$Sb.\overline{\varphi+\pi+\mu} - Sb.\overline{\varphi+\pi+\mu} = \frac{\overline{Ch.\overline{\varphi+\pi} - [Sb.\overline{\varphi+\pi}}.\overline{Ch.\mu - Sb.\mu}}{r}$$

$$Cc.\overline{\varphi+\pi+\mu} + \sqrt{-1}.Sc.\overline{\varphi+\pi+\mu} = \frac{\overline{Cc.\overline{\varphi+\pi} + \sqrt{-1}.Sc.\overline{\varphi+\pi}}.\overline{Cc.\mu + \sqrt{-1}.Sc.\mu}}{r}$$

$$Cc.\overline{\varphi+\pi+\mu} - \sqrt{-1}.Sc.\overline{\varphi+\pi+\mu} = \frac{\overline{Cc.\overline{\varphi+\pi} - \sqrt{-1}.Sc.\overline{\varphi+\pi}}.\overline{Cc.\mu - \sqrt{-1}.Sc.\mu}}{r}.$$

Sub-

Subſtitue pro $Ch.\overline{\varphi+\pi}+Sh.\overline{\varphi+\pi}$, item pro $Ch.\overline{\varphi+\pi}-Sh.\overline{\varphi+\pi}$ valores, quos prima duo theoremata præbent. Quod faciendum eſt etiam in quantitatibus circularibus. Orientur porro nova hæc quatuor theoremata

$$Ch.\overline{\varphi+\pi+\mu}+Sh.\overline{\varphi+\pi+\mu}=\frac{\overline{Ch.\varphi+Sh\varphi}.\overline{Ch.\pi+Sh\pi}.\overline{Ch.\mu+Sh.\mu}}{r^2}$$

$$Ch.\overline{\varphi+\pi+\mu}-Sh.\overline{\varphi+\pi+\mu}=\frac{\overline{Ch.\varphi-Sh.\varphi}.\overline{Ch.\pi-Sh.\pi}.\overline{Ch.\mu-Sh.\mu}}{r^2}$$

$$Cc.\overline{\varphi+\pi+\mu}+\sqrt{-1}.Sc.\overline{\varphi+\pi+\mu}=\frac{\overline{Cc.\varphi+\sqrt{-1}.Sc.\varphi}.\overline{Cc.\pi+\sqrt{-1}.Sc.\pi}.\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}}{r^2}$$

$$Cc.\overline{\varphi+\pi+\mu}-\sqrt{-1}.Sc.\overline{\varphi+\pi+\mu}=\frac{\overline{Cc.\varphi-\sqrt{-1}.Sc.\varphi}.\overline{Cc.\pi-\sqrt{-1}.Sc.\pi}.\overline{Cc.\mu-\sqrt{-1}.Sc.\mu}}{r^2}.$$

Ponantur æquales φ, π, μ, factaque ut antea æquationum additione, & ſubductione naſcentur

$$Ch.3\varphi=\frac{\overline{Ch.\varphi+Sh.\varphi}^3+\overline{Ch.\varphi-Sh.\varphi}^3}{2r^2}$$

$$Sh.3\varphi=\frac{\overline{Ch.\varphi+Sh.\varphi}^3-[\overline{Ch.\varphi-Sh.\varphi}^3}{2r^2}$$

$$Cc.3\varphi=\frac{\overline{Cc.\varphi+\sqrt{-1}.Sc.\varphi}^3+\overline{Cc.\varphi-\sqrt{-1}.Sc.\varphi}}{2r^2}$$

$$\sqrt{-1}.Sc.3\varphi=\frac{\overline{Cc.\varphi+\sqrt{-1}.Sc.\varphi}^3-[\overline{Cc.\varphi-\sqrt{-1}.Sc.\varphi}^3}{2r^2}.$$

Si antequam addas, & ſubtrahas æquationes, extrahas tertii gradus radicem, invenies

$$\frac{\overline{Ch.3\varphi+Sh.3\varphi}^{\frac{1}{3}}+\overline{Ch.3\varphi-Sh.3\varphi}^{\frac{1}{3}}}{2r^{-\frac{2}{3}}}=Ch.\varphi$$

$$\frac{\overline{Ch.3\varphi + Sh.3\varphi}^{\frac{1}{3}} - [\overline{Ch.3\varphi - Sh.3\varphi}^{\frac{1}{3}}}{2r^{-\frac{2}{3}}} = Sh.\varphi$$

$$\frac{\overline{Cc.3\varphi + \sqrt{-1}.Sc.3\varphi}^{\frac{1}{3}} + \overline{Cc.3\varphi - \sqrt{-1}.Sc.3\varphi}^{\frac{1}{3}}}{2r^{-\frac{2}{3}}} = Cc.\varphi$$

$$\frac{\overline{Cc.3\varphi + \sqrt{-1}.Sc.3\varphi}^{\frac{1}{3}} - [\overline{Cc.3\varphi - \sqrt{-1}.Sc.3\varphi}^{\frac{1}{3}}}{2.r^{-\frac{2}{3}}} = Sc.\varphi.\sqrt{-1}.$$

Hic autem progreſſus poteſt, ut perſpicuum eſt, in infinitum produci. Quare hæ formulæ generatim valebunt

$$Ch.n\varphi = \frac{\overline{Ch.\varphi + Sh.\varphi}^{n} + \overline{Ch.\varphi - Sh.\varphi}^{n}}{2r^{n-1}}$$

$$Sh.n\varphi = \frac{\overline{Ch.\varphi + Sh.\varphi}^{n} - [\overline{Ch.\varphi - Sh.\varphi}^{n}}{2r^{n-1}}$$

$$Cc.n\varphi = \frac{\overline{Cc.\varphi + \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{n} + \overline{Sc.\varphi - \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{n}}{2r^{n-1}}$$

$$Sc.n\varphi.\sqrt{-1} = \frac{\overline{Cc.\varphi + \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{n} - [\overline{Cc.\varphi - \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{n}}{2r^{n-1}}.$$

Si n eſt numerus integer, aut unitas diviſa per numerum integrum, res eſt clariſſime demonſtrata. In reliquis numeris ex inductione probata remanet.

Quod ſi cui hoc genus demonſtrationis minus arridet, afferam primum pro numeris fractis, cujus numerator non ſit unitas, deinde pro negativis demonſtrationem clariſſimam ex ſuperioribus deductam. Sit fractio $= \frac{n}{m}$. Conſtat ex ſuperioribus

$$Ch.\frac{n\varphi}{m} = \frac{\overline{Ch.\frac{\varphi}{m} + Sh.\frac{\varphi}{m}}^{n} + \overline{Ch.\frac{\varphi}{m} - Sh.\frac{\varphi}{m}}^{n}}{2r^{n-1}}$$

Sh.

$$Sb \cdot \frac{n\varphi}{m} = \frac{\overline{Cb \cdot \frac{\varphi}{m} + Sb \cdot \frac{\varphi}{m}}^{\,n} - (\overline{Cb \cdot \frac{\varphi}{m} - Sb \cdot \frac{\varphi}{m}}^{\,n}}{2\, r^{n-1}}$$

$$Cc \cdot \frac{n\varphi}{m} = \frac{\overline{Cc \cdot \frac{\varphi}{m} + \sqrt{-1} \cdot Sc \cdot \frac{\varphi}{m}}^{\,n} + \overline{Cc \cdot \frac{\varphi}{m} - \sqrt{-1} \cdot Sc \cdot \frac{\varphi}{m}}^{\,n}}{2\, r^{n-1}}$$

$$\sqrt{-1} \cdot Sc \cdot \frac{n\varphi}{m} = \frac{\overline{Cc \cdot \frac{\varphi}{m} + \sqrt{-1} \cdot Sc \cdot \frac{\varphi}{m}}^{\,n} - (\overline{Cc \cdot \frac{\varphi}{m} - \sqrt{-1} \cdot Sc \cdot \frac{\varphi}{m}}^{\,n}}{2\, r^{n-1}}.$$

Atqui ex ſupra demonſtratis

$$Cb \cdot \frac{\varphi}{m} = \frac{\overline{Cb \cdot \varphi + Sb \cdot \varphi}^{\,\frac{1}{m}} + \overline{Cb \cdot \varphi - Sb \cdot \varphi}^{\,\frac{1}{m}}}{2\, r^{\frac{1}{m}-1}}$$

$$Sb \cdot \frac{\varphi}{m} = \frac{\overline{Cb \cdot \varphi + Sb \cdot \varphi}^{\,\frac{1}{m}} - (\overline{Cb \cdot \varphi - Sb \cdot \varphi}^{\,\frac{1}{m}}}{2\, r^{\frac{1}{m}-1}}$$

$$Cc \cdot \frac{\varphi}{m} = \frac{\overline{Cc \cdot \varphi + \sqrt{-1} \cdot Sc \cdot \varphi}^{\,\frac{1}{m}} + \overline{Cc \cdot \varphi - \sqrt{-1} \cdot Sc \cdot \varphi}^{\,\frac{1}{m}}}{2\, r^{\frac{2}{m}-1}}$$

$$\sqrt{-1} \cdot Sc \cdot \frac{\varphi}{m} = \frac{\overline{Cc \cdot \varphi + \sqrt{-1} \cdot Sc \cdot \varphi}^{\,\frac{1}{m}} - (\overline{Cc \cdot \varphi - \sqrt{-1} \cdot Sc \cdot \varphi}^{\,\frac{1}{m}}}{2\, r^{\frac{1}{m}-1}}.$$

Qui valores ſi in ſuperioribus æquationibus ſubſtituantur, expurgatis, ut par eſt, æquationibus invenientur

$$Cb \cdot \frac{n\varphi}{m} = \frac{\overline{Cb \cdot \varphi + Sb \cdot \varphi}^{\,\frac{n}{m}} + \overline{Cb \cdot \varphi - Sb \cdot \varphi}^{\,\frac{n}{m}}}{2\, r^{\frac{n}{m}-1}}$$

Sb.

$$Sb.\frac{n\varphi}{m} = \frac{\overline{Cb.\varphi + Sb.\varphi}^{\frac{n}{m}} - [\overline{Cb.\varphi - Sb.\varphi}^{\frac{n}{m}}}{2r^{\frac{n}{m}-1}}$$

$$Cc.\frac{n\varphi}{m} = \frac{\overline{Cc.\varphi + \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{\frac{n}{m}} + \overline{Cc.\varphi - \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{\frac{n}{m}}}{2r^{\frac{n}{m}-1}}$$

$$\sqrt{-1}.Sc.\frac{n\varphi}{m} = \frac{\overline{Cc.\varphi + \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{\frac{n}{m}} - [\overline{Cc.\varphi - \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{\frac{n}{m}}}{2r^{\frac{n}{m}-1}}.$$

Quod erat demonſtrandum.

Quoad numeros negativos fac advertas, quod antea etiam notavi, coſinum logarithmi, aut arcus negativi eundem eſſe, ac coſinum poſitivi; contra ſinum logarithmi, aut arcus negativi eſſe quidem æqualem ſinui poſitivi, ſed tamen negativum. Quamobrem valebunt hujuſmodi formulæ

$$Cb.-n\varphi = \frac{\overline{Cb.\varphi + Sb.\varphi}^{n} + \overline{Cb.\varphi - Sb.\varphi}^{n}}{2r^{n-1}}$$

$$Sb.-n\varphi = -\frac{[\overline{Cb.\varphi + Sb.\varphi}^{n} + \overline{Cb.\varphi - Sb.\varphi}^{n}}{2r^{n-1}}$$

$$Cc.-n\varphi = \frac{\overline{Cc.\varphi + \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{n} + \overline{Cc.\varphi - \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{n}}{2r^{n-1}}$$

$$\sqrt{-1}.Sc.-n\varphi = -\frac{[\overline{Cc.\varphi + \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{n} + \overline{Cc.\varphi - \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{n}}{2r^{n-1}}.$$

Quæ formulæ in duas fractiones tranſmutari poſſunt, in quibus negativum ſit diviſoris exponens, in hanc formam

$$Cb.-n\varphi = \frac{r^{-n+1}}{2.\overline{Cb.\varphi + Sb.\varphi}^{-n}} + \frac{r^{-n+1}}{2.\overline{Cb.\varphi - Sb.\varphi}^{-n}}$$

Sb.

$$Sb.-n\varphi = \frac{-r^{-n+1}}{2.\overline{Cb.\varphi+Sb.\varphi}^{\,-n}} + \frac{r^{-n+1}}{2.\overline{Cb.\varphi-Sb.\varphi}^{\,-n}}$$

$$Cc.-n\varphi = \frac{r^{-n+1}}{2.\overline{Cc.\varphi+\sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{\,-n}} + \frac{r^{-n+1}}{2.\overline{Cc.\varphi-\sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{\,-1}}$$

$$\sqrt{-1}.\,Sc.-n\varphi = \frac{-r^{-n+1}}{2.\overline{Cc.\varphi+\sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{\,-n}} + \frac{r^{-n+1}}{2.\overline{Cc.\varphi-\sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{\,-n}}.$$

Si redigas fractiones hujuſmodi ad eundem denominatorem, & pro communi diviſore $\overline{Cb.\varphi}^{\,2} - \overline{Sb.\varphi}^{\,2}$, aut $\overline{Cc.\varphi}^{\,2} + \overline{Sc.\varphi}^{\,2}$ ſubſtituas rr illi æqualem ex natura hyperbolæ, & circuli, invenies æquationes quatuor, quæ probandæ ſunt: ſcilicet

$$Cb.-n\varphi = \frac{\overline{Cb.\varphi+Sb.\varphi}^{\,-n} + \overline{Cb.\varphi-Sb.\varphi}^{\,-n}}{2\,r^{-n-1}}$$

$$Sb.-n\varphi = \frac{\overline{Cb.\varphi+Sb.\varphi}^{\,-n} - (\overline{Cb.\varphi-Sb.\varphi}^{\,-n}}{2\,r^{-n-1}}$$

$$Cc.-n\varphi = \frac{\overline{Cc.\varphi+\sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{\,-n} + \overline{Cc.\varphi-\sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{\,-n}}{2\,r^{-n-1}}$$

$$\sqrt{-1}.\,Sc.-n\varphi = \frac{\overline{Cc.\varphi+\sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{\,-n} - (\overline{Cc.\varphi-\sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{\,-n}}{2\,r^{-n-1}}.$$

Quamobrem veritas formularum, quas præmiſimus, demonſtrata eſt in omnibus numeris rationalibus. Quod ſpectat ad irrationales, poteſt ea demonſtrari adhibito calculo infiniteſimali. Sed quum hoc ad præſens inſtitutum noſtrum minime pertineat, ſatis eſt illam ex inductione probaſſe.

Poſtquam ea, quæ neceſſaria viſa ſunt, de ſinibus, & coſinibus tum hyperbolicis, tum circularibus demonſtravimus, ad noſtrarum radicum conſtructionem propius accedamus. Radices hujuſmodi, uti conſtat ex prima parte, plerumque hanc habent formam $x = \overline{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}}^{\,\frac{1}{p}} + \overline{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}}^{\,\frac{1}{p}}$, in qua p eſt nu-

numerus indicans gradum æquationis, ex qua radix extracta eſt. Hæc in qualibet hypotheſi conſtruenda eſt per ſinus, & coſinus. Quod, ut elegantius fiat, divido æquationem per 2, ut ſit

$\frac{x}{2} = \frac{\overline{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}}^{\frac{1}{p}} + \overline{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}}^{\frac{1}{p}}}{2}$, atque determino $\frac{x}{2}$

dimidium radicis quæſitæ.

In hypotheſi prima ſtatuo tam a, quam b poſitivam. Duplicem caſum in hac diſtinguamus oportet: nam ſi $\frac{bb}{4} > a^p$, nihil imaginarii formula continebit; ſi vero $\frac{bb}{4} < a^p$, aderit radix imaginaria. In primo caſu comparanda eſt cum expreſſione coſinus logarithmi ſubmultipli, nempe cum $Ch.\frac{\varphi}{p} =$

$\frac{\overline{Ch.\varphi + Sh.\varphi}^{\frac{1}{p}} + \overline{Ch.\varphi - Sh.\varphi}^{\frac{1}{p}}}{2r^{\frac{1}{p}-1}}$. In ſecundo caſu comparanda

erit cum formula coſinus arcus ſubmultipli, nimirum cum

$$Cc.\frac{\varphi}{p} = \frac{\overline{Cc.\varphi + \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{\frac{1}{p}} + \overline{Cc.\varphi - \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{\frac{1}{p}}}{2r^{\frac{1}{p}-1}}.$$

Fiat primi caſus collatio, & habentur æquationes duæ

$\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p} = \frac{Ch.\varphi + Sh.\varphi}{r^{1-p}}$

$\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p} = \frac{Ch.\varphi - Sh.\varphi}{r^{1-p}}$: Igitur facta additione, & ſubtractione æquationum

$\frac{b}{2} = \frac{Ch.\varphi}{r^{1-p}}$, & $\sqrt{\frac{bb}{4} - a^p} = \frac{Sh.\varphi}{r^{1-p}}$: atqui $\overline{Ch.\varphi}^2 - \overline{Sh.\varphi}^2$

$= rr$: Ergo ſubſtitutis valoribus $\frac{bb}{4} - \frac{bb}{4} + a^p = \frac{rr}{r^{2-2p}}$, ſive

$a^p = r^{2p}$, ſive $a^{\frac{1}{2}} = r$. Quapropter $\frac{x}{2}$ erit $Ch.\frac{\varphi}{p}$ exiſtente φ

eo

eo logarithmo, cujus coſinus $= \frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$, & ſinu toto $= a^{\frac{x}{2}}$.

Hujuſmodi itaque oritur conſtructio. Deſcripta hyperbola æquilatera (*Fig.* 1), cujus ſinus totus, ſeu ſemiaxis AC $= a^{\frac{1}{2}}$, abſcinde CM $= \frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$, & excitetur ſinus MN. Ex punctis A, N in aſſymptotum demittantur normales AK, NP. Inter CK, CP inveniantur tot mediæ proportionales, quot ſunt unitates in $p-1$, quarum prima ſit CG. Ex G duc GE perpendicularem aſſymptoto, tum ſinum EB, qui determinat coſinum CB $= \frac{x}{2}$.

Si p ſit numerus impar, prima ex mediis proportionalibus inter CK, CP, unicum tantum valorem habet realem: quare una tantum erit æquationis radix realis. Si vero p ſit numerus par, prima ex mediis proportionalibus duos valores æquales habet alterum poſitivum, alterum negativum, nempe CG, Cg: quare etiam Cb. $\frac{\varphi}{p}$ duos valores æquales habet nempe CB, Cb primum poſitivum, ſecundum negativum: igitur etiam $\frac{x}{2}$. Ratio conſtructionis ex ſuperioribus abunde perſpicua eſt.

Fiat alterius caſus comparatio, & ex duabus æquationibus

$$\frac{b}{2} + \sqrt{-1}.\sqrt{a^p - \frac{bb}{4}} = \frac{Cc.\varphi + \sqrt{-1}.Sc.\varphi}{r^{1-p}}$$

$$\frac{b}{2} - \sqrt{-1}.\sqrt{a^p - \frac{bb}{4}} = \frac{Cc.\varphi - \sqrt{-1}.Sc.\varphi}{r^{1-p}}$$

invenies $\frac{b}{2} = \frac{Cc.\varphi}{r^{1-p}}$, $\sqrt{a^p - \frac{bb}{4}} = \frac{Sc.\varphi}{r^{1-p}}$: atqui $\overline{Cc.\varphi}^2 + \overline{Sc.\varphi}^2 = rr$: Ergo $\frac{bb}{4} + a^p - \frac{bb}{4} = \frac{rr}{r^{2-2p}}$, ſive $a^p = r^{2p}$, & $a^{\frac{1}{2}} = r$. Itaque $\frac{x}{2}$ erit Cc. $\frac{\varphi}{p}$, dummodo ſinus totus $= a^{\frac{1}{2}}$, & C$c.\varphi = \frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$.

Ex his pleno alveo fluit conſtructio. Deſcripto circulo, cujus ſinus totus, ſeu radius (*Fig.* 2) $CA = a^{\frac{1}{2}}$ capiatur $CM = \frac{b}{2 \cdot a^{\frac{p-1}{2}}}$, & ducatur ſinus MN, erit AN arcus $= \varphi$. Arcus hic in tot partes dividatur, quot unitates inſunt in numero p, quarum prima ſit $AE = \frac{\varphi}{p}$. Agatur ſinus EB, coſinus $CB = \frac{x}{2}$.

Non unus tantum arcus AN, ſed infiniti alii exiſtunt arcus, quorum coſinus eſt $CM = \frac{b}{2 \cdot a^{\frac{p-1}{2}}}$, nempe facta circumferentia circuli $= c$, & arcu $AN = \varphi$ omnes arcus φ, $c + \varphi$, $2c + \varphi$, $3c + \varphi$ ec. imo & alii φ, $-c + \varphi$, $-2c + \varphi$, $-3c + \varphi$ ec., qui, ut vides, numero infiniti ſunt, quos pariter ſi dividas in partes p, invenies novos arcus A2E, A3E ec. quorum coſinus C2B, C3B exhibent novos valores radicis $\frac{x}{2}$.

Ne tamen putes, reales valores radicis $\frac{x}{2}$ eſſe numero infinitos: tot enim ſunt, quot unitates exſiſtunt in numero p. Namque ſi $p = 2$ diviſio arcus $AN = \varphi$ bifariam exhibet punctum primum, diviſio arcus $c + \varphi$ præbet punctum ſecundum, quod opponitur ex diametro puncto primo. Si dividatur arcus $2c + \varphi$ in primum punctum denuo diviſio cadit, ſi dividatur arcus $3c + \varphi$ diviſio cadit in ſecundum punctum: atque ita deinceps ceteræ omnes diviſiones non nova, ſed eadem duo puncta ſemper determinant, per quæ duæ tantum radices reales $\frac{x}{2}$ exhibentur. Si $p = 3$, diviſio trium arcuum φ, $c + \varphi$, $2c + \varphi$ in partes æquales tres, tria puncta E, 2E, 3E; reliquorum autem arcuum diviſiones in hæc eadem puncta cadent. Quare tres dumtaxat habentur radices æquationis reales. Idem dic de caſibus reliquis. Nam per diviſionem arcuum numero p inveniuntur puncta numero p: reliquæ diviſiones eadem puncta præbent: quare $\frac{x}{2}$ tot valores habebit, quot unitates inſunt in numero p. Quod quum notiſſimum ſit, pluribus explicandum non judico.

Primæ hypotheſi affinis eſt altera, in qua ſupponitur quidem a poſitiva, at b negativa. In hac ſi ſpeciei b mutetur ſignum, hanc induit formam æquatio

$x =$

$$\frac{x}{2} = \frac{\left(-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)^{\frac{1}{p}}}{2}$$

; quæ comparanda eſt cum coſinu logarithmi ſubmultipli, ſi $\frac{bb}{4} > a^p$, cum coſinu arcus ſubmultipli, ſi $\frac{bb}{4} < a^p$. Comparatio præbet valores eoſdem, ac hypotheſis prima, cum hoc tantum diſcrimine, quod coſinus φ provenit negativus, exiſtente ſinu poſitivo. Quare in caſu $\frac{bb}{4} > a^p$ hujuſmodi oritur conſtructio. Deſcripta hyperbola æquilatera (*Fig.* 3), cujus ſinus totus CA $= a^{\frac{1}{2}}$, abſcinde CM $= \frac{b}{2 \cdot a^{\frac{p-1}{2}}}$, quæ quoniam negativa inventa eſt ſumitur ad partem coſinuum negativorum. Huic excitetur normalis MN, quæ ſumitur ad partes ſinuum poſitivorum, quia ſinus inventus eſt poſitivus. Ex N in aſſymptotum CK demittatur normalis NP. Inter CK, & CP inveniantur tot mediæ proportionales, quot ſunt unitates in numero $p - 1$, quarum prima ſit CG. Normalis aſſymptoto ſit GE, & normalis axi ſit EB, coſinus CB, qui negativus eſt, erit $= \frac{x}{2}$.

Quoniam CG eſt prima ex mediis proportionalibus inter CK poſitivam, & inter CP negativam, non ſemper realis eſt, ſed aliquando imaginaria. Itaque neceſſarium eſt hoc determinare. Si p ſit numerus impar, inter CK, & CP inveniendæ erunt mediæ proportionales numero pares: atqui inter quantitatem poſitivam, & negativam numero pares mediæ proportionales poſſibiles ſunt & reales, quarum prima ſemper negativa eſt: Ergo ſi p eſt numerus impar, CG erit realis, & negativa: Ergo etiam CB æqualis radici $\frac{x}{2}$ eſt realis, & negativa.

Verumtamen ſi p ſit numerus par, numero impares mediæ proportionales erunt inveniendæ: atqui inter quantitatem poſitivam, & negativam numero impares mediæ proportionales non omnes reales ſunt, ſed prima, tertia, quinta ec. ſunt imaginariæ: Ergo quum CG prima eſſe debeat, erit imaginaria, adeoque etiam CB $= \frac{x}{2}$. Itaque in-primo caſu ſecundæ hypotheſis, ſi p

ſit impar, adeſt una tantum radix realis negativa, ſi p ſit par, radices omnes ſunt imaginariæ.

In ſecundo caſu ejuſdem hypotheſis quum ſcilicet $\frac{bb}{4} < a^p$, hæc habetur conſtructio, quæ docet, omnes omnino radices eſſe reales. Deſcripto circulo (*Fig.* 4), cujus ſinus totus, ſeu radius $= a^{\frac{1}{2}}$ abſcindatur negativus coſinus $CM = \frac{b}{2 \cdot a^{\frac{p-1}{2}}}$, & excitetur poſitivus ſinus MN. Arcus AN dividatur in partes æquales numero p, quarum prima ſit AE. Ducto ſinu EB, determinetur coſinus CB, qui erit una radix $= \frac{x}{2}$. Vocato arcu $AN = \varphi$, accipiantur arcus φ, $c + \varphi$, $2c + \varphi$ ec. tot, quot ſunt unitates in p, & facta horum arcuum diviſione in partes æquales numero p, determinantur puncta E, 2E, 3E ec., quæ determinant omnes radices æquationis CB, C2B, C3B ec. Superfluum eſſet plures arcus accipere, quia eadem prorſus puncta in diviſione redirent.

Tertia hypotheſis, in qua b poſitiva ſit, a negativa, plures caſus nos diſtinguere jubet. Primus caſus ſtatuet numerum p imparem. In hoc mutato ſigno ſpeciei a, æquatio hanc induet formam

$$\frac{x}{2} = \frac{\overline{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} + a^p}}^{\frac{1}{p}} + \overline{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} + a^p}}^{\frac{1}{p}}}{2},$$

quæ quum nihil imaginarii contineat, ad hyperbolam eſt referenda. Nonemo primoribus oculis formulam intuens fortaſſe judicabit, eam comparandam eſſe cum expreſſione coſinus logarithmi ſubmultipli. Sed ſi comparationem inſtituat, cognoſcet ſtatim, ſinum totum imaginarium oriri. Quod non indicat conſtructionem eſſe impoſſibilem, ſed formulam non per coſinum, ſed per ſinum hyperbolicum eſſe conſtruendam. Quod ex eo poteras quoque colligere, quia ſi ſecus fieret, ſinus major eſſet coſinu, quod in hyperbola omnino impoſſibile eſt.

Itaque ut formulam referamus ad ſinum, ita eam diſponimus

$$\frac{x}{2} = \frac{\overline{\sqrt{\frac{bb}{4} + a^p} + \frac{b}{2}}^{\frac{1}{p}} - (\overline{\sqrt{\frac{bb}{4} + a^p} - \frac{b}{2}}^{\frac{1}{p}}}{2},$$

quæ comparan-

randa eſt cum ſequenti $Sb.\frac{\varphi}{p} = \frac{\overline{Ch.\varphi + Sb.\varphi}^{\frac{1}{p}} - [\overline{Ch.\varphi - Sb.\varphi}^{\frac{1}{p}}}{2r^{\frac{1}{p}-1}}$.

Collatio ſufficit æquationes duas

$$\sqrt{\frac{bb}{4} + a^p} + \frac{b}{2} = \frac{Ch.\varphi + Sb.\varphi}{r^{1-p}}$$

$$\sqrt{\frac{bb}{4} + a^p} - \frac{b}{2} = \frac{Ch.\varphi - Sb.\varphi}{r^{1-p}}$$, ex quibus propter ambiguitatem ſignorum provenit $\sqrt{\frac{bb}{4} + a^p} = \frac{Ch.\varphi}{r^{1-p}}$, $\frac{b}{2} = \frac{Sb.\varphi}{r^{1-p}}$: atqui $\overline{Ch.\varphi}^2 - \overline{Sb.\varphi}^2 = rr$: Ergo

$$\frac{bb}{4} + a^p - \frac{bb}{4} = a^p = \frac{r^2}{r^{2-2p}} = r^{2p}: \text{ Ergo } a^{\frac{1}{2}} = r.$$

Deſcribe hyperbolam, cujus ſinus totus $CA = a^{\frac{1}{2}}$; duc AK (*Fig.* 1) normalem aſſymptoto; accommoda ſinum $MN = \frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$, & demitte in aſſymptotum normalem NP. Inter CK, CP inveni CG primam ex tot mediis proportionalibus, quot ſunt unitates in numero $p-1$. In caſu autem p imparis hæc ſemper realis eſt, & unica. Ex G ſit GE perpendicularis aſſymptoto, & ex E ducatur ſinus EB, qui erit $= \frac{x}{2}$ nempe radici quæſitæ.

Quum p eſt numerus par, admonuimus in prima parte mutari formulam aliquantum, & hanc valere

$$\frac{x}{2} = \frac{\overline{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}}^{\frac{1}{p}} - (\overline{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}}^{\frac{1}{p}}}{2}$$, quam conſtat ad ſinum eſſe referendam. In hac vel $\frac{bb}{4} > a^p$, & formula nihil continebit imaginarii, atque hic erit tertiæ hypotheſis caſus alter; vel $\frac{bb}{4} < a^p$, & imaginaria radix formulam afficiet.

In ſecundo caſu comparanda eſt cum formula ſinus logarithmi ſub-

ſubmultipli. Comparatio autem inſtituta dabit $\frac{b}{2} = \frac{Cb \cdot \varphi}{r^{1-p}}$, $\sqrt{\frac{bb}{4} - a^p} = \frac{Sb \cdot \varphi}{r^{1-p}}$, & $a^{\frac{1}{2}} = r$. Quare conſtructio parum differt a ſuperiore. Nam deſcripta ut ſupra (*Fig.* 1) hyperbola abſcinde $CM = \frac{b}{2 \cdot a^{\frac{p-1}{2}}}$, & duc ſinum MN, & ex N perpendicularem aſſymptoto NP. Inter CK, & CP determina CG primam ex tot mediis proportionalibus, quot unitates continet $p - 1$; tum ordina aſſymptoto rectam GE, & axi ſinum EB, hic æquabit $\frac{x}{2}$ æquationis radicem.

Quoniam $p - 1$ ponitur numerus impar, duæ erunt primæ mediæ proportionales inter CK, CP, æquales quidem, ſed altera poſitiva, altera negativa, nempe CG, C*g*: quare duæ etiam radices $= \frac{x}{2}$, nempe EB poſitiva, & *eb* negativa.

Si in formula ſuperiori $\frac{bb}{4} < a^p$, imaginariæ radices apparebunt. Elegantiæ cauſſa ita diſponatur

$$\frac{x}{2} = \frac{\overline{\frac{b}{2} + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a^p - \frac{bb}{4}}}^{\frac{1}{p}} - \left(\overline{\frac{b}{2} - \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a^p - \frac{bb}{4}}}^{\frac{1}{p}}\right.}{2}.$$

Ut hæc poſſit comparari cum expreſſione ſinus arcus ſubmultipli, multiplicetur per $\sqrt{-1}$

$$\frac{x}{2}\sqrt{-1} = \overline{\sqrt{-1} \cdot \frac{b}{2} + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a^p - \frac{bb}{4}}}^{\frac{1}{p}} - \overline{\sqrt{-1} \cdot \frac{b}{2} - \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a^p - \frac{bb}{4}}}^{\frac{1}{p}}.$$

Si $\sqrt{-1}$ elevetur ad poteſtatem p parem poteſt exhibere & $+1$, & -1. Dabit $+1$, ſi p ſit ex hac ſerie 4, 8, 12, 16, 20 ec. hoc eſt pariter par. Præbebit -1, ſi p ſit ex ſerie 2, 6, 10, 14, 18 ec. ideſt impariter par.

Sit p pariter par, atque hic ſit tertiæ hypotheſis caſus tertius. In hoc caſu $\sqrt{-1}$ elevata ad poteſtatem p, & opportune multiplicat nihil mutat terminos. Erit itaque

$\frac{x}{2}$

$$\frac{x}{2}\sqrt{-1} = \frac{\overline{\frac{b}{2} + \sqrt{-1}\sqrt{a^p - \frac{bb}{4}}}^{\frac{1}{p}} - \overline{(\frac{b}{2} - \sqrt{-1}\sqrt{a^p - \frac{bb}{4}}}^{\frac{1}{p}}}{2}.$$

Fiat collatio cum expreſſione arcus ſubmultipli, & oriuntur æquationes duæ

$$\frac{b}{2} + \sqrt{-1}\sqrt{a^p - \frac{bb}{4}} = \frac{Cc.\varphi + \sqrt{-1}.Sc.\varphi}{r^{1-p}}$$

$\frac{b}{2} - \sqrt{-1}\sqrt{a^p - \frac{bb}{4}} = \frac{Cc.\varphi - \sqrt{-1}.Sc.\varphi}{r^{1-p}}$. Ex quibus propter ambiguitatem ſignorum hæ naſcuntur $\frac{b}{2} = \frac{Cc.\varphi}{r^{1-p}}$, $\sqrt{a^p - \frac{bb}{4}} = \frac{Sc.\varphi}{r^{1-p}}$: Ergo $\frac{bb}{4} + a^p - \frac{bb}{4} = a^p = \frac{\overline{Cc.\varphi}^2 + \overline{Sc.\varphi}^2}{r^{2-2p}} = \frac{r^2}{r^{2-2p}} = r^{2p}$: Ergo $a^{\frac{1}{2}} = r$.

Conſtructio ſimilis eſt ſuperiori. Nam in circulo (*Fig.* 2) cujus ſinus totus $= a^{\frac{1}{2}}$, ſume coſinum $CM = -\frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$, & duc ſinum MN. Arcum AN divide in partes æquales numero p, quarum prima ſit AE, ſinus $EB = \frac{x}{2}$. Radix hæc realis non eſt unica, ſed tot habentur, quot unitates ſunt in numero p. Inveniuntur per diviſionem arcuum φ, $c+\varphi$, $2c+\varphi$, $3c+\varphi$ ec., ut ex ſuperioribus manifeſtum eſt, ſi $AN = \varphi$.

Hujuſce hypotheſis caſus quartus, & ultimus ponit, numerum p eſſe impariter parem, quo in caſu quum $\sqrt{-1}$ elata ad poteſtatem p præbeat -1, formula in hanc mutatur

$$\frac{x}{2}\sqrt{-1} = \frac{\overline{(-\frac{b}{2} - \sqrt{-1}\sqrt{a^p - \frac{bb}{4}}}^{\frac{1}{p}} - \overline{(-\frac{b}{2} + \sqrt{-1}\sqrt{a^p - \frac{bb}{4}}}^{\frac{1}{p}}}{2}.$$

Si hæc conferatur cum expreſſione ſinus arcus ſubmultipli eædem determinationes provenient, quæ in caſu ſuperiore cum hoc tantum

tum diſcrimine, quod tam $Cc.\varphi$, quam $Sc.\varphi$ negativus exurget. Quare hæc orietur conſtructio.

In circulo, cujus ſinus totus (*Fig.* 8) $CA = a^{\frac{1}{2}}$, ad partes coſinuum negativorum abſcinde $CM = \frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$, & duc MN ad partes negativorum ſinuum. Arcum AaN divide in partes æquales numero p, quarum prima ſit AE, cujus ſinus $EB = \frac{x}{2}$ unam ex quæſitis radicibus. Reliquas eodem modo invenies per diviſionem arcuum $c+\varphi$, $2c+\varphi$, $3c+\varphi$ ec., quemadmodum ſupra determinavimus poſito arcu $AaN = \varphi$.

Quartam, & ultimam hypotheſim, in qua non minus a, quam b negativa eſt, quia ſimilis eſt priori, breviter expedio. In primo caſu ſupponente p numerum imparem hæc habetur formula

$$\frac{x}{2} = \frac{\overline{\sqrt{\frac{bb}{4}+a^p}-\frac{b}{2}}^{\frac{1}{p}} - (\overline{\sqrt{\frac{bb}{4}+a^p}+\frac{b}{2}}^{\frac{1}{p}}}{2}:$$ quæ collata cum expreſſione ſinus logarithmi ſubmultipli eaſdem determinationes præbet ac in hypotheſi ſuperiore cum hoc tantum diſcrimine, quod $Sb.\varphi$ (*Fig.* 5) evadit negativus. Quare in eadem hyperbola ad partes negativorum ſinuum applicetur $MN = \frac{b}{2:a^{\frac{p-1}{2}}}$, & ducta in aſſymptotum normali NP inveniatur CG prima ex tot mediis proportionalibus, quot unitates ſunt in $p-1$, quæ exiſtente p impari unica eſt. Agatur aſſymptoto normalis GE, & ſinus EB, qui æquabit radicem $\frac{x}{2}$.

In ſecundo caſu, quum p eſt par, & $\frac{bb}{4} > a^p$ hæc formula valet $$\frac{x}{2} = \frac{(\overline{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}}^{\frac{1}{p}} - (\overline{-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}}^{\frac{1}{p}}}{2},$$ quæ præbet eaſdem determinationes, ſed tam $Cb.\varphi$, quam $Sb.\varphi$ evadit negativus. Quare ad partes coſinuum negativorum accipienda eſt

eſt $CM = \frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$, agendus ſinus MN ad partes negativorum, & ducenda normalis aſſymptoto NP. Inter CK poſitivam, & CP negativam invenienda eſſet prima ex mediis proportionalibus $p-1$. Verum quum p eſt numerus par, hæc eſt imaginaria. Quare in hoc caſu radices omnes $\frac{x}{2}$ imaginariæ ſunt.

In tertio caſu, ubi $\frac{bb}{4} < a^p$, & p eſt numerus pariter par, formula eſt hujuſmodi

$$\frac{x}{2}\sqrt{-1} = \frac{\left(-\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{a^p-\frac{bb}{4}}\right)^{\frac{1}{p}} - \left(-\frac{b}{2}-\sqrt{-1}.\sqrt{a^p-\frac{bb}{4}}\right)^{\frac{1}{p}}}{2},$$

in qua $Cc.\varphi$ negativus eſt, & $Sc.\varphi$ poſitivus (*Fig.* 4). Quare in eodem circulo radii $= a^{\frac{1}{2}}$, ſume negativum coſinum CM $= \frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$, & poſitivum ſinum MN. Divide arcum $AN = \varphi$ in partes æquales numero p, quarum prima ſit AE. Hujus ſinus EB æquabit radicem $\frac{x}{2}$, & ſimilis diviſio arcuum $c+\varphi$, $2c+\varphi$, $3c+\varphi$ ec. reliquas radices præbebit.

In quarto caſu, in quo iiſdem ſuppoſitis p eſt numerus impariter par, formula hæc obtinetur

$$\frac{x}{2}\sqrt{-1} = \frac{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{a^p-\frac{bb}{4}}\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\frac{b}{2}+\sqrt{-1}.\sqrt{a^p-\frac{bb}{4}}\right)^{\frac{1}{p}}}{2}.$$

Si fiat collatio cum expreſſione ſinus arcus ſubmultipli, invenietur $Cc.\varphi$ poſitivus, at $Sc.\varphi$ negativus. Quare ad partes poſitivorum coſinuum (*Fig.* 6) ſumpto $CM = \frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$, agatur ſinus negativus MN. Arcus $AaN = \varphi$ dividatur in partes æquales p, quarum prima ſit AE. Ejus ſinus EB exhibet radicem $\frac{x}{2}$. Reliquas radices

(omnes enim ſunt reales) invenies per diviſionem arcuum $c + \varphi$, $2c + \varphi$, $3c + \varphi$ ec., quemadmodum ſupra monuimus.

Si p ſit numerus compoſitus, monuimus in prima parte æquationem reſolvi poſſe reſolutis pluribus ejus gradus, quem indicant numeri componentes. Hoc ipſum conſtructio tradita edocere potuiſſet. Hæc enim innititur omnis vel in diviſione arcus circularis in partes æquales numero p, vel in inventione tot mediarum proportionalium inter duas datas, quot ſunt unitates in numero $p - 1$. Utrumque autem problema per partes reſolvi poteſt, ſi p ſit numerus compoſitus. Nam quod ſpectat ad arcum circularem: ſit p numerus compoſitus ex numeris r, s. Dividatur primum arcus in partes æquales numero r; tum ſingulæ hæ partes dividantur in partes numero s. Manifeſtum eſt, arcum fore diviſum in partes numero $rs = p$. Idem dic ſi plures, quam duo, eſſent numeri componentes.

Quod pertinet ad inventionem plurium mediarum proportionalium: inter duas datas fac invenias medias proportionales numero $r - 1$, quæ ſimul cum duabus datis efficient quantitates numero $r + 1$; & inter has quantitates inerunt intervalla numero r. In ſingulis intervallis tot proportionales medias colloca, quot habet unitates $s - 1$. Numerus harum proportionalium æquabit $rs - r$, qui numerus additus numero earum, quæ antea inventæ ſunt nempe cum $r - 1$ dat ſummam $rs - r + r - 1 = rs - 1$ $= p - 1$. Idem ratiocinium valet, ſi plures, quam duo, eſſent numeri componentes.

Non deſunt methodi cum geometricæ, tum mechanicæ dividendi arcum in partes æquales, & inveniendi plures medias proportionales inter duas datas. Quare conſtructio hæc noſtra, quæ utitur vel diviſione arcus in partes æquales, vel inventione plurium mediarum proportionalium, æquationem, ut ajebant veteres, ad locos jam reſolutos perducit. Non ſum neſcius, æquationes, quas conſtruximus per ſinus, aut coſinus hyperbolicos, poſſe ſine eorum auxilio per medias proportionales abſolvi. Etenim formula $\left(\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{bb}{4} - a^{p}}\right)^{\frac{1}{p}}$, quam ſolum æquationes reſolutæ continent, inventis mediis proportionalibus $p - 1$ inter duas datas conſtruitur. Pone enim $\frac{b}{2} = f^{p}$, & $a = g^{2}$, formula mutabitur in hanc,

$f^{p} +$

$\overline{f^p \pm \sqrt{f^{2p} - g^{2p}}}^{\frac{1}{p}}$, ſive $f^{p-1} . \overline{f \pm \sqrt{ff - \frac{g^{2p}}{f^{2p-2}}}}^{\frac{1}{p}}$, atqui hæc eſt prima ex mediis proportionalibus $p-1$ inter duas datas f primam, & $f \pm \sqrt{ff - \frac{g^{2p}}{f^{2p-2}}}$ ultimam. Ad hanc autem methodum neceſſe eſt confugere in illis caſibus, in quibus noſtra deficit. Namque ſi aut $a = o$, aut $\frac{bb}{a} - a^p = o$, noſtræ formulæ fiunt ſimpliciores; ſed ipſa earum ſimplicitas non ſinit, ut ſinus, & coſinus hyperbolici habeant utilitatem. Quare immediate per inventionem mediarum proportionalium æquatio erit conſtruenda.

Exceptis duobus hiſce caſibus ſatius judicavi, adhibere methodum coſinuum, & ſinuum hyperbolicorum tum quia perelegans mihi viſa eſt, tum quia cuſtodit mirifice analogiam cum conſtructione, quæ abſolvitur per diviſionem arcus circularis.

Omittendum non eſt, quod in determinato quovis circulo, atque hyperbola peragi conſtructio poteſt. Namque ſit circulus, aut hyperbola, cujus ſinus totus ſit $= f$. Fiat ut $a^{\frac{1}{2}} : f :: \frac{b}{a^{\frac{p-1}{2}}} : \frac{fb}{a^{\frac{p}{2}}}$. Quum $\frac{b}{a^{\frac{p-1}{2}}}$ debeat eſſe ſinus, aut coſinus arcus, ſeu logarithmi φ ſumpto ſinu toto $= a^{\frac{1}{2}}$, erit $\frac{fb}{a^{\frac{p}{2}}}$ ſinus, aut coſinus arcus, ſeu logarithmi reſpondentis ſumpto ſinu toto $= f$. Hunc autem vocemus $= \pi$. Inveniatur ſinus, aut coſinus arcus, ſeu logarithmi $\frac{\pi}{p}$. Tum denuo fiat $f : a^{\frac{1}{2}}$ ita ſinus, aut coſinus arcus, ſeu logarithmi $\frac{\pi}{p}$ ad ſinum, aut coſinum arcus, ſeu logarithmi $\frac{\varphi}{p}$, qui fiet cognitus: igitur cognita quoque fiet radix $\frac{x}{2}$.

Hæc animadverſio viam ſternit ad inveniendas noſtrarum æquationum radices ope tabularum, quarum aliquæ jam conſtructæ ſunt, aliquæ haud difficulter conſtrui poſſunt. Loquamur primum de illis

æquationibus, quæ conſtruuntur per diviſionem arcuum circularium; tabulas enim arcuum conſtructas habemus. Sed quoniam in tabulis non habemus ſinus, aut coſinus arcuum ſuperantium quadrantem, hæc animadvertenda erunt. Si arcus minor ſit quadrante, ſinum, & coſinum habet poſitivum: ſi major ſit quadrante, minor ſemicircumferentia, habet ſinum, & coſinum æqualem ſinui, & coſinui arcus ſemicircumferentiam complentis, ſed ſinus poſitive accipiendus eſt, negative coſinus. Si arcus ſuperet ſemicircumferentiam, ſed minor ſit tribus quadrantibus habebit ſinum, & coſinum eoſdem, ac arcus, qui eſt differentia inter datum & ſemicircumferentiam, ſed uterque negative capiendus eſt; denique ſi arcus major ſit tribus quadrantibus, habebit ſinum negativum, & coſinum poſitivum, at eoſdem, ac arcus, qui ſimul cum illo circumferentiam complet. Idem ordo redit, ſi accipiantur arcus circumferentia majores. Quare viceverſa ſi tam ſinus, quam coſinus poſitivus ſit, arcus minor erit quadrante; ſi ſinus poſitivus, coſinus negativus, arcus minor erit ſemicircumferentia, ſed major quadrante; ſi uterque negativus eſt, arcus ſuperabit ſemicircumferentiam, ſed deficiet a tribus quadrantibus; demum ſi coſinus poſitivus ſit, ſinus negativus, arcus major erit quadrantibus tribus, ſed minor circumferentia: arcus autem minor quadrante habens æqualem ſinum, & coſinum æquabit differentiam inter circumferentiam, aut ſemicircumferentiam & arcum quæſitum. Hiſce autem arcubus potes circumferentiam integram toties addere, quoties volueris.

His animadverſis conſiderato ſinu toto $f = 1$ inveni in tabulis coſinum $= \frac{b}{a^{\frac{p}{2}}}$, cui reſpondebit arcus minor quadrante in tabulis. Accipe vel hunc, vel differentiam ſemicircumferentiæ, & hujus, vel ſummam ſemicircumferentiæ & hujus, vel differentiam inter hunc & circumferentiam, prout ſinus, aut coſinus negativi, aut poſitivi expoſcunt. Hac ratione determinabis arcum π; inveni in tabulis arcum $\frac{\pi}{p}$, cujus ſinum, aut coſinum ex iiſdem tabulis determinabis. Hunc multiplica per $a^{\frac{1}{2}}$, & invenies per approximationem radicem $\frac{x}{2}$. Eodem modo reliquas radices nanciſceris.

Eodem modo æquationes illas approximando reſolves, quæ indigent

digent ſinibus, & coſinibus hyperbolicis. Sed prius neceſſe eſſet tabulam conſtruere ſinus hoſce & coſinus exhibentem. In prima columna conſtituendi eſſent numeri unitate tum majores, tum minores. In ſecunda eorum logarithmi deſumpti in eo ſyſtemate, in quo protonumerus $= \frac{1}{\sqrt{2}}$, ſubtangens $= 1$, quorum inveniendorum rationem alio loco docui. Imo ex ipſis logarithmis, qui vulgo dicuntur hyperbolici, hi, quos analogos voco, facillime deducuntur. In tertia, & quarta columna collocandi ſunt ſinus, & coſinus hyperbolici, quorum inveniendorum methodum expeditam ſeries exhibebunt. Columnis his addere potes quintam, & ſextam continentem tangentes, & ſecantes hyperbolicas, quæ tametſi reſolvendis noſtris æquationibus non inſerviant, tamen in permultis aliis inquiſitionibus habere poſſunt utilitatem.

Quiſque videt, logarithmos numerorum majorum quam $\frac{1}{\sqrt{2}}$ poſitivos fore, eorumque ſinus, & coſinus eſſe pariter poſitivos. Verum numeri minores, quam $\frac{1}{\sqrt{2}}$, logarithmos habebunt negativos, quorum coſinus poſitivi erunt, ſinus autem negativi. Negativos numeros tabula non complectitur. Sed hæc tenenda ſunt. Si numerus negativus ſit, & minor $\frac{1}{\sqrt{2}}$, logarithmus negativus erit, coſinus negativus, ſinus autem poſitivus. Si numerus negativus major ſit $\frac{1}{\sqrt{2}}$, logarithmus, ſinus, & coſinus erunt negativi. Cæterum logarithmi, ſinus, & coſinus reſpondentes numeris negativis æquales ſunt illis, qui reſpondent numeris poſitivis.

Si conſtructas haſce tabulas haberemus, hoc modo invenirentur æquationum radices. Inveni in tabulis ſinum, aut coſinum, prout calculus poſtulat, æqualem $\frac{b}{a^{\frac{p}{2}}}$, ſumo enim $f = 1$. Si tam ſinus, quam coſinus fuerit poſitivus, accipe illum, qui reſpondet numero majori quam $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Si coſinus fuerit poſitivus, ſinus negativus, illum accipe, qui reſpondet numero minori quam $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Tum cape in tabula logarithmum reſpondentem, qui in primo caſu

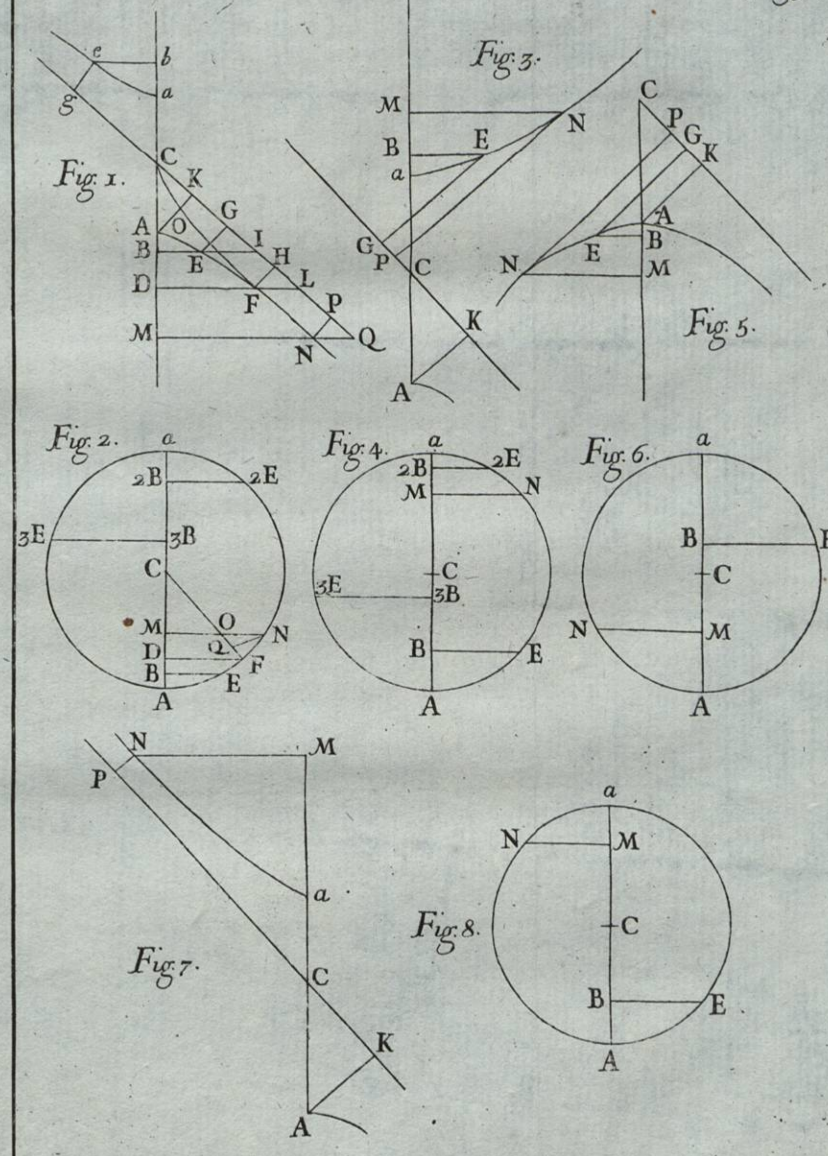
caſu poſitivus erit, in altero negativus. Si tam ſinus quam coſinus foret negativus, primus logarithmus accipiendus eſſet, ſed negative. Si coſinus negativus foret, ſinus poſitivus, capiendus eſſet alter, ſed negative. Inventum ita logarithmum π divide in partes p, & huic parti æqualem accipe in tabula logarithmum, cui reſpondentem ſinum, aut coſinum nota; hunc multiplica per $a^{\frac{1}{2}}$, & invenies per approximationem radicem $\frac{x}{2}$.

Verum hanc regulam tene, ne utens tabulis incidas in errorem. Si p ſit numerus impar, una ſemper habetur radix realis, quæ, ſi exprimatur per coſinum, poſitiva erit, $Cb.\varphi$ exiſtente poſitivo, ſi exprimatur per ſinum, $Sb.\varphi$ poſitivo exiſtente, & verſa vice. Si p ſit numerus par, aut duplex erit radix poſitiva & negativa, aut nulla; duplex, ſi $Cb.\varphi$ poſitivus fuerit, nulla, ſi idem fuerit negativus. Hanc tibi regulam ſequenti tabulæ vero proximas radices ſuppeditabunt.

Quæ dicta ſunt de noſtris æquationibus, complectuntur æquationes omnes tertii gradus, quæ ut noſtro canoni ſubſint, nihil requiritur aliud, niſi ut careant ſecundo termino. Hæc autem conditio ſemper poteſt obtineri. Quamobrem æquationes omnes tertii gradus reſolvuntur per diviſionem arcus circularis, aut logarithmi analogi in partes tres; ſeu ſi ad conſtructionem geometricam mavis accedere, per diviſionem arcus in tres partes, aut per inventionem duarum mediarum proportionalium inter duas datas. Quæ autem æquationes altiorum graduum ſimili methodo reſolvantur, opuſculum hoc planiſſime declaravit. (*a*)

OPU-

(*a*) *Scripſi initio hujus opuſculi, methodum reſolvendi æquationem quadrato-quadraticam, quæ legitur in opere Rafaelis Bombellii, a Chriſtiano Wolfio tribui Ludovico cuidam Ferrarienſi. Quum Wolfii auctoritati non admodum fiderem, interrogavi Joannem Andream Barottum, quem Ferrarienſium litteratorum monumenta collegiſſe accipio, quiſnam eſſet Ludovicus hic Ferrarienſis, & quonam argumento tam illuſtris inventio illi eſſet referenda. Reſpondit vir humaniſſimus æque, ac doctiſſimus, falli ſine dubio Wolfium, & ad Ludovicum de Ferrariis, qui patria Ferrarienſis non eſt, eam methodum pertinere, ut apertis verbis teſtatur Hieronymus Cardanus. Reapſe Cardanus lib. x. de Arithmetica cap. 39 regula ſecunda:* Alia, *inquit*, eſt regula nobilior præcedente, & eſt Ludovici de Ferrariis, qui eam me rogante invenit, & per eam habemus omnes æſtimationes formæ capitulorum quad-quadrati, & quadrati rerum, & numeri, vel quad-quadrati, cubi, quadrati, & numeri ec.



4.

OPUSCULUM QUINTUM.

Solutio Problematis ad methodum Tangentium inverſam pertinentis. Diſquiſitio mathematica.

PRopoſitum olim fuerat in familiari ſermone a viro in rebus analyticis ſatis verſato problema pertinens ad Tangentium inverſam methodum, quod a ſe tentatum ſæpius ajebat, ſolutum autem eſſe ingenue negabat. Problema vero (*Fig.* 1) erat hujuſmodi. Datis duobus punctis A, C, quorum alterum ſit in data recta CI, invenire curvam AGF tranſeuntem per punctum A, cujus proprietas ſit, ut ducta tangente qualibet GT pars curvæ AG æquet rectam CT.

Hoc ubi mihi renunciatum eſt, cœpi pro virili parte rem aggredi, neque non ex ſententia. Namque brevi ſolutionem nactus, quam in hoc opuſculo primum exponam, eam viri clariſſimi, qui problema propoſuerat, judicio, atque cenſuræ ſubjeci.

Deinceps hac ſolutione perfecta problema magis late patens mihi propoſui; quum ſcilicet pars curvæ AG eſſet ad rectam CT in qualibet data ratione. Quod problema majus mihi negotium fecit: nam & in ſeparandis incognitis æquationis differentialis, & in concilianda calculo facilitate, atque elegantia, otii, atque operæ fateor me multum conſumpſiſſe. Sed novas ſæpius methodos in periculum traducens, atque utilia quædam analyſeos adjumenta in ſubſidium vocans, quid tandem aſſequutus fuerim, penes æquum lectorem Geometram judicium ſit. Ego jam ad rem propius accedens, primum naturam ejus curvæ patefaciam, quæ poſtulat ut AG æquet CT, deinde earum, quæ poſtulant, ut eæ lineæ ſint in qualibet data ratione.

Verum ad præparandam analyſim omnes quotquot ſunt conjungens ita communi quadam notione enunciandum puto, quod propoſitum eſt.

PROBLEMA.

Datis duobus punctis A, C, quorum alterum poſitum eſt in data recta CI, oportet invenire curvam AGF tranſeuntem per pun-

punctum A, cujus proprietas ſit, ut ducta qualibet tangente GT pars curvæ AG ſit ad rectam CT in conſtanti qualibet ratione.

Si conjungantur puncta A, C linea recta, perſpicuum eſt ab hac tangi curvam in puncto A. Per idem punctum A agatur AB parallela CI, & ex puncto C in haſce parallelas ducatur perpendicularis CB. Ex quolibet puncto G quæſitæ curvæ AGF intelligatur ducta tangens GT; item ex puncto *g* priori infinite proximo ducatur alia tangens *gt*, quæ producta cum priori concurret in puncto *i*. Facto centro in *i* intervallo *it* deſcribatur minimus arcus circuli *tl*. Ex punctis G, *g* agantur GO, *go* parallelæ BC. Item parallela rectæ AB ſit GK ſecans *og* in *b*, quæ concurrat in K cum linea, quæ ex puncto T ducitur parallela BC.

Quum pars curvæ AG ad rectam CT debeat eſſe in definita quadam ratione, quam nominabo $1:n$, etiam elementum G*g* ad elementum T*t* erit in eadem ratione $1:n$: Ergo T*t* $= n.$ G*g*. Sed productis GT, BC donec concurrant in H eſt T*t* : T*l* :: TH : CT, ſive :: G*g* : G*b*: Ergo quando T*t* $= n.$ G*g*, neceſſe eſt, ut T*l* $= n.$ G*b*. Sed notum eſt, duarum tangentium GT, *gt* differentiam $= -$ G*g* $-$ T*l*: Ergo tangentium differentia $= -$ G*g* $- n.$ G*b*. Ergo invenitur per methodum ſummatoriam tangens GT $=$ M $-$ AG $- n.$ AO. M eſt conſtans addita, quæ ut determinetur, advertendum eſt fieri GT $=$ AC evaneſcentibus AG, AO. Quare tangens GT $=$ AC $-$ AG $- n.$ AO.

Similiter GK $=$ AB $-$ CT $-$ AO $=$ AB $- n.$ AG $-$ AO.

Jam vero GT : GK :: G*g* : G*b*, ſive

AC $-$ AG $- n.$ AO : AB $- n.$ AG $-$ AO :: G*g* : G*b*. Vocetur jam AC $= a$, AB $= b$, AG $= s$, AO $= x$, G*g* $= ds$, O*o* $=$ G*b* $= dx$. Quare habebitur formula $a - s - nx : b - ns - x :: ds : dx$, ex qua oritur æquatio

$$(1)\ \frac{a-s-nx}{b-ns-x}.\, dx = ds.$$

Hæc æquatio pertinet ad omnes curvas, quæcumque tandem ſit proportio curvæ AG ad rectam CT. Verum analyſi hoc pacto præparata oportet jam ſeparare caſus, & ſingulos ſeorſim pertractare. Supponamus primum curvam AG rectæ CT æqualem eſſe oportere; qua in hypotheſi fiet $n = 1$: Ergo æquatio prima mutabitur in ſecundam.

$$(2)\ \frac{\overline{a-s-x}}{b-s-x}.\, dx = ds.$$

In hoc præcipue collocanda eſt opera, ut in ſecunda æquatione incognitæ ſeparentur. Quam ob rem methodum cenſeo ineundam lon-

longiorem quidem, ſed rei, qua de agimus, magis accommodatam. Sit BC $= c$, & locum habebit æquatio

$$(3)\ aa = bb + cc.$$

Item ſit GO $= y$, & KT $= c - y$. Ob angulum rectum K erit $GT^2 = GK^2 + TK^2$, ſive analytice

$$aa - 2a.\overline{s+x} + \overline{s+x}^2 = bb - 2b.\overline{s+x} + \overline{s+x}^2 + cc - 2cy + yy:$$

Ergo deletis delendis

$$aa - 2a.\overline{s+x} = bb - 2b.\overline{s+x} + cc - 2cy + yy:$$ atque hac dempta ex tertia fiet $s + x = \frac{2cy - yy}{2a - 2b}$. Quo expeditior fiat methodus accipe æquationem

$$(4)\ \frac{2cy - yy}{2a - 2b} = z.$$

Itaque erit $s + x = z$: quam formulam tanquam ſubſidiariam adhibens, fac arceas ab æquatione ſecunda ſpeciem s, & fiet $\frac{a-z}{b-z}.dx = dz - dx$, ſive $adx - zdx + bdx - zdx = bdz - zdz$, ſive $2dx = \frac{b-z}{\frac{a+b}{2} - z}.dz = dz + \frac{\overline{\frac{a-b}{2}}.-dz}{\frac{a+b}{2} - z}$.

Quam æquationem ſi integres, obtinebis formulam

(5) $2x = z + l\,\overline{\frac{a+b}{2} - z}$: qui logarithmus accipiendus eſt in logiſtica, cujus ſubtangens $= \frac{a-b}{2}$, atque ita accipiendus, ut, dum evaneſcit x, etiam z evaneſcat.

Ex præmiſſa Analyſi, atque præparatione oritur hujuſmodi conſtructio. Ductis duabus lineis parallelis (*Fig.* 2) LP, VR, quarum diſtantia $= \frac{a+b}{2}$, cum aſſymptoto VR deſcribe logiſticam ML, cujus ſubtangens ſit $= \frac{a-b}{2}$. Curva hæc ſecabit alteram ex parallelis in L: ex quo puncto inclinetur LR ad angulum ſemirectum, & ducatur LV parallelis perpendicularis. Si ex quolibet puncto M ducantur MNP, & MQ, altera normalis, altera parallela rectæ LP; tunc MP, vel LQ repræſentantibus z, MN repræſentabunt $2x$. Nam quum $\frac{a+b}{2} - z$ minor ſit $\frac{a+b}{2}$, cujus logarithmus poni debet $= o$, logarithmus $\frac{a+b}{2} - z$ tanquam negativus accipiendus eſt, ac propterea detrahendus a z, ut inveniatur $2x$.

Si jam formulam quartam tibi proponas, nimirum $\frac{2cy - yy}{2a - 2b} = z$, invenies $2cy - yy = \overline{2a - 2b} . z$, ſive $cc - 2cy + yy = cc - \overline{2a + 2b} . z = \overline{2a - 2b} . \overline{\frac{a + b}{2} - z}$, quæ eſt ad parabolam, atque hoc pacto conſtruitur. Accipe VS $= c$, & vertice S parametro $2a - 2b$, hoc eſt quadrupla ſubtangentis logiſticæ, deſcribe parabolam, quæ tranſeat per punctum L neceſſe eſt. Jam vero LQ $= z$, XQ $= y$.

Igitur ſi curvam conſtruas, cujus abſciſſæ æquent dimidium rectarum MN, ordinatæ autem æquent XQ (*Fig.* 1), ea curva orietur, quam quærimus; quæ compoſita eſt ramis duobus ſimilibus, & æqualibus MGF, *mgf*, qui ex una parte habent pro aſſymptoto rectam CI, ex altera in infinitum recedunt a lineis, BA, *ba*.

Si hujuſce curvæ, quam deſcripſimus, aveas habere æquationem differentialem in quintam æquationem introduc valorem z datum per quartam, & habebis $2x = \frac{2cy - yy}{2a - 2b} + l\,\overline{\frac{a + b}{2} - \frac{2cy + yy}{2a - 2b}}$. Qua differentiata poſt neceſſarias operationes invenies æquationem

(6) $2dx = \frac{dy . \overline{c - y}}{a - b} - \frac{dy . \overline{a - b}}{c - y}$ pro æquatione differentiali curvæ quæſitæ.

Brevior adhuc fiet, ſi ponas $c - y = u$, & $-dy = du$, & fiet æquatio curvæ quæſitæ.

(7) $2dx = \frac{-udu}{a - b} + \frac{du . \overline{a - b}}{u}$.

Deſcendamus jam ad alterum caſum, quando ſcilicet AG eſt : CT : : AB : AC; quo in caſu neceſſe eſt, ut ſit $b : a :: n : 1$, ſive $b = na$. Jam vero ad ſeparandas indeterminatas in formula prima $\frac{a - s - nx}{b - ns - x} . dx = ds$ fac utaris ſubſtitutione, quæ continetur in æquatione

(8) $b - ns - x = zx$:

Ergo $\frac{b - x - zx}{n} = s$, & $\frac{-dx - zdx - xdz}{n} = ds$, quibus valoribus in æquatione prima ſubſtitutis erit $\frac{na - b + x + zx - n^2 x}{nzx} . dx = \frac{-dx - zdx - xdz}{n}$, & multiplicando per n, & delendo termi-

nos

nos $na - b$, qui ex hypotheſi ſeſe deſtruunt erit $\frac{\overline{x + zx - n^2 x}}{zx} . dx$ $= - dx - zdx - xdz$, ſive $\overline{1 + z - n^2 + z + z^2} . dx = - xzdz$, ex qua provenit

(9) $\frac{dx}{x} = \frac{-zdz}{z^2 + 2z + 1 - n^2}$.

Hæc autem æquatio, in qua incognitæ ſeparatæ ſunt, ut integrabilis fiat, diſponenda eſt in hunc modum

$\frac{dx}{x} = \frac{\frac{1-n}{2n} dz}{z + 1 - n} + \frac{\frac{1+n}{2n} . - dz}{z + 1 + n}$, qua integrata cum additione conſtantis Q, factoque tranſitu a logarithmis ad numeros habebitur æquatio

(10) $x = \frac{Q . \overline{z + 1 - n}^{\frac{1-n}{2n}}}{\overline{z + 1 + n}^{\frac{1+n}{2}}}$.

Jam vero quum ſit KT : KG :: bg : bG, ſive analytice $c - y : b - ns - x :: dy : dx$, erit $\frac{dy}{c - y} = \frac{dx}{b - ns - x}$: ex æquatione octava ſubſtitue pro $b - ns - x$, ejus valorem xz, & habebis $\frac{dy}{c - y}$ $= \frac{dx}{xz}$: in quam introduc valorem $\frac{dx}{x}$ datum in æquatione nona, & invenies $\frac{dy}{c - y} = \frac{-dz}{zz + 2z + 1 - nn}$; quam, ut integres, ita diſpone $\frac{dy}{c - y} = \frac{- \frac{1}{2n} dz}{z + 1 - n} + \frac{\frac{1}{2n} dz}{z + 1 + n}$. Qua integrata cum additione conſtantis P, factoque tranſitu a logarithmis ad numeros habetur

(11) $\frac{P}{c - y} = \frac{\overline{z + 1 + n}^{\frac{1}{2n}}}{\overline{z + 1 - n}^{\frac{1}{2n}}}$.

Verum ſine ulla limitatione proponamus nobis æquationem ſecundam $\frac{a - s - nx}{b - ns - x} . dx = ds$: ad quam reſolvendam uſurpetur primo ſubſtitutio, quæ continetur in æquatione

(12) $x = t - \frac{b + na}{nn - 1}$, quæ dabit

$$\frac{a+\frac{nb-nna}{nn-1}-s-nt}{b+\frac{b-na}{nn-1}-ns-t}\cdot dt=ds, \text{ ſive } \frac{\frac{nb-a}{nn-1}-s-nt}{\frac{n^2b-na}{nn-1}-ns-t}\cdot dt=ds.$$

Quæ æquatio prorſus ſimilis eſt ſecundæ pro caſu, quod $b=na$, ut conſideranti palam fiet.

Itaque ſi per eandem methodum utaris ſubſtitutione

$$(13)\ \frac{n^2b-na}{nn-1}-ns-t=tz$$ invenies æquationes

$$(14)\ \frac{dt}{t}=\frac{-zdz}{zz+2z+1-nn},\ \&\ (15)\ t=\frac{Q.\overline{z+1-n}^{\frac{1-n}{2n}}}{\overline{z+1+n}^{\frac{1+n}{2n}}},$$ in quibus, ſi ponatur valor t datus per x in æquatione 12, prodibunt æquationes

$$(16)\ \frac{dx}{x+\frac{b-na}{nn-1}}=\frac{-zdz}{zz+2z+1-nn},$$

$$(17)\ x+\frac{b-na}{nn-1}=\frac{Q.\overline{z+1-n}^{\frac{1-n}{2n}}}{\overline{z+1+n}^{\frac{1+n}{2n}}}.$$

Jam vero, ut ſupra oſtenſum eſt, quum ſit $c-y:b-x-ns::dy:dx$ erit ex æquatione duodecima $c-y:b+\frac{b-na}{nn-1}-t-ns=\frac{n^2b-na}{nn-1}-t-ns::dy:dx=dt$, ſive ex decima tertia $c-y:tz::dy:dt:$ Ergo $\frac{dy}{c-y}=\frac{dt}{tz}:$ Ergo ex decimaquarta $\frac{dy}{c-y}=\frac{-dz}{zz+2z+1-nn}$. Ex qua integrata provenit æquatio

$$(18)\ \frac{P}{c-y}=\frac{\overline{z+1+n}^{\frac{1}{2n}}}{\overline{z+1-n}^{\frac{1}{2n}}}.$$

Æquationes duæ decima ſeptima, & decima octava tanquam univerſales accipi poſſunt, ac debent; nam ſi valeret æquatio $b=na$, terminus conſtans additus quantitati x in æquatione decima ſeptima ſe ſe deſtrueret; atque adeo convenirent cum æquatione decima, ac undecima, quæ pro ea hypotheſi inventæ ſunt.

Danda nunc eſt opera, ut ex æquationibus decimaſeptima, & decima octava nova æquatio eruatur inter coordinatas x, y.

Ita-

Itaque ex decimaoctava æquatione oritur $\frac{P^{2n}}{\overline{c-y}^{2n}} = \frac{z+1+n}{z+1-n}$, ſive $\frac{\overline{c-y}^{2n}}{P^{2n}} = \frac{z+1-n}{z+1+n}$, ex qua duæ

(19) $\frac{\overline{c-y}^{1+n}}{P^{1+n}} = \frac{\overline{z+1-n}^{\frac{1+n}{2n}}}{\overline{z+1+n}^{\frac{1+n}{2n}}}$,

(20) $\frac{\overline{c-y}^{2n}}{P^{2n}} . \overline{z+1+n} = z+1-n$.

Ex decimaſeptima provenit $x + \frac{b-na}{nn-1} = \frac{Q.\overline{z+1-n}^{\frac{1+n}{2n}}}{\overline{z+1+n}^{\frac{1+n}{2n}}} . \overline{z+1-n}^{-1}$, in quam introductus valor datus in decimanona præbet $x \frac{+b-na}{nn-1} = \frac{Q.\overline{c-y}^{1+n}}{P^{1+n}} . \overline{z+1-n}^{-1}$: Ergo $z+1-n = \frac{Q.\overline{c-y}^{1+n}}{P^{1+n}.\overline{x+\frac{b-na}{nn-1}}}$, & $z+1+n = \frac{Q.\overline{c-y}^{1+n}}{P^{1+n}.\overline{x+\frac{b-na}{nn-1}}} + 2n$.

Qui valores introducti in æquationem vigeſimam dabunt $\frac{\overline{c-y}^{2n}}{P^{2n}} . \overline{\frac{Q.\overline{c-y}^{1+n}}{P^{1+n}.\overline{x+\frac{b-na}{nn-1}}} + 2n} = \frac{Q.\overline{c-y}^{1+n}}{P^{1+n}.\overline{x+\frac{b-na}{nn-1}}}$, ſive $\frac{\overline{c-y}^{2n}}{P^{2n}} . \overline{Q.\overline{c-y}^{1+n} + 2n.P^{1+n}.\overline{x+\frac{b-na}{nn-1}}} = Q.\overline{c-y}^{1+n}$, & dividendo per $\overline{c-y}^{2n}$, & multiplicando per P^{2n} $Q.\overline{c-y}^{1+n} + 2nP^{1+n}.\overline{x+\frac{b-na}{nn-1}} = Q.P^{2n}.\overline{c-y}^{1-n}$, denique transferendo $Q.\overline{c-y}^{1+n}$, & dividendo per Q erit

(21) $\frac{2n.P^{1+n}}{Q}.\overline{x+\frac{b-na}{nn-1}} = P^{2n}.\overline{c-y}^{1-n} - (\overline{c-y}^{1+n}$,

quæ æquatio exhibens quæſitarum curvarum naturam algebraica eſt, ubi numerus n eſt rationalis. Excipe tamen hypotheſim, in qua $n=1$, ad quam, ut cuique perſpicuum eſt, hæc formula ne-

qua-

quaquam ſe ſe extendit; ſed caſus iſte ſolutus eſt initio hujus opuſculi.

Nihil jam reliquum eſt, niſi ut conſtantium P^{2n}, & $\frac{P^{1+n}}{Q}$ valores determinentur. Quoniam evaneſcente s, tam x quam y debet evaneſcere, fiet pro hac hypotheſi in æquatione duodecima $t = \frac{b-na}{nn-1}$: Ergo ex æquatione decima tertia $\frac{n^2 b - na}{nn-1} - \frac{b+na}{nn-1} = z \cdot \frac{b-na}{nn-1}$, ſive $\frac{n^2 b - b}{b-na} = z$, qui valor facto $y = o$ introductus in decimam octavam exhibet

$$\frac{P}{c} = \frac{\overline{n^2 b - b + b - na + nb - n^2 a}^{\frac{1}{2n}}}{\overline{n^2 b - b + b - na - nb + n^2 a}^{\frac{1}{2n}}} = \frac{\overline{n+1}^{\frac{1}{2n}} \cdot \overline{b-a}^{\frac{1}{2n}}}{\overline{n-1}^{\frac{1}{2n}} \cdot \overline{b+a}^{\frac{1}{2n}}}.$$ Igitur

$$(22)\quad P^{2n} = \frac{c^{2n} \cdot \overline{n+1} \cdot \overline{b-a}}{\overline{n-1} \cdot \overline{b+a}}.$$

Si hic valor in vigeſimam primam introducatur, factis x, $y = o$, fiet $\frac{2n \cdot P^{n+1}}{Q} \cdot \frac{b-na}{nn-1} = \frac{c^{1+n} \cdot \overline{n+1} \cdot \overline{b-a}}{\overline{n-1} \cdot \overline{b+a}} - c^{1+n}$: Ergo

$$\frac{2n \cdot P^{n+1}}{Q} \cdot \frac{\overline{b-na}}{nn-1} = c^{1+n} \cdot \frac{\overline{\overline{n+1} \cdot \overline{b-a} - (\overline{n-1} \cdot \overline{b+a}}}{\overline{n-1} \cdot \overline{b+a}}$$: Igitur

$$\frac{2n \cdot P^{n+1}}{Q} \cdot \frac{b-na}{nn-1} = c^{1+n} \cdot \frac{\overline{2b - 2na}}{\overline{n-1} \cdot b+a}$$: Igitur

$$(23)\quad \frac{2n P^{n+1}}{Q} = \frac{\overline{2n+2} \cdot c^{1+n}}{b+a}.$$

Valores conſtantium inventi in vigeſima ſecunda, & vigeſima tertia æquatione in vigeſimam primam introducantur, ut habeatur legitima æquatio earum curvarum, quas quærimus

$$\frac{c^{1+n} \cdot \overline{2n+2}}{b+a} \cdot \overline{x + \frac{\overline{b-na}}{nn-1}} = \frac{c^{2n} \cdot \overline{n+1} \cdot \overline{b-a}}{\overline{n-1} \cdot b+a} \cdot \overline{c-y}^{1-n} - (\overline{c-y}^{1+n}$$

ſive

$$(24)\quad x + \frac{b-na}{nn-1} = \frac{c^{n-1} \cdot \overline{b-a}}{2n-2} \cdot \overline{c-y}^{1-n} - \frac{c^{-1-n} \cdot \overline{b+a}}{2n+2} \cdot \overline{c-y}^{1+n}.$$

Quæ

Quæ a vigeſima quarta æquatione curvæ exprimuntur partim algebraicæ ſunt, partim tranſcendentes, & exponentiales: omnes tamen non difficilis conſtructionis. Ego vero ut tandem finem huic opuſculo faciam, eas dumtaxat conſtruendas aſſumam, quæ gignuntur, quum n numerus integer eſt vel par, vel impar. Quam ob rem ita æquationem diſponendam judico

$$\frac{na-b}{nn-1}-x=\frac{\overline{a-b}\,.\,c^{n-1}}{\overline{2n-2}\,.\,\overline{c-y}^{\,n-1}}+\frac{\overline{b+a}\,.\,\overline{c-y}^{\,n+1}}{\overline{2n+2}\,.\,c^{n+1}}.$$

Quæ ut ſimplicior fiat, pono $\frac{na-b}{nn-1}-x=z$, & $c-y=u$, ex quibus ſubſtitutionibus oritur æquatio multo ſimplicior

$$(25)\quad z=\frac{\overline{a-b}\,.\,c^{n-1}}{\overline{2n-2}\,.\,u^{n-1}}+\frac{\overline{b+a}\,.\,u^{n+1}}{\overline{2n+2}\,.\,c^{n+1}}.$$

Æquatione hoc pacto diſpoſita inſtituo duas novas æquationes

$$(26)\quad \frac{\overline{a-b}\,.\,c^{n-1}}{\overline{2n-2}\,.\,u^{n-1}}=r \qquad (27)\quad \frac{\overline{a+b}\,.\,u^{n+1}}{\overline{2n+2}\,.\,c^{n+1}}=t,$$

ex quibus reſultat æquatio

$$(28)\quad z=r+t.$$

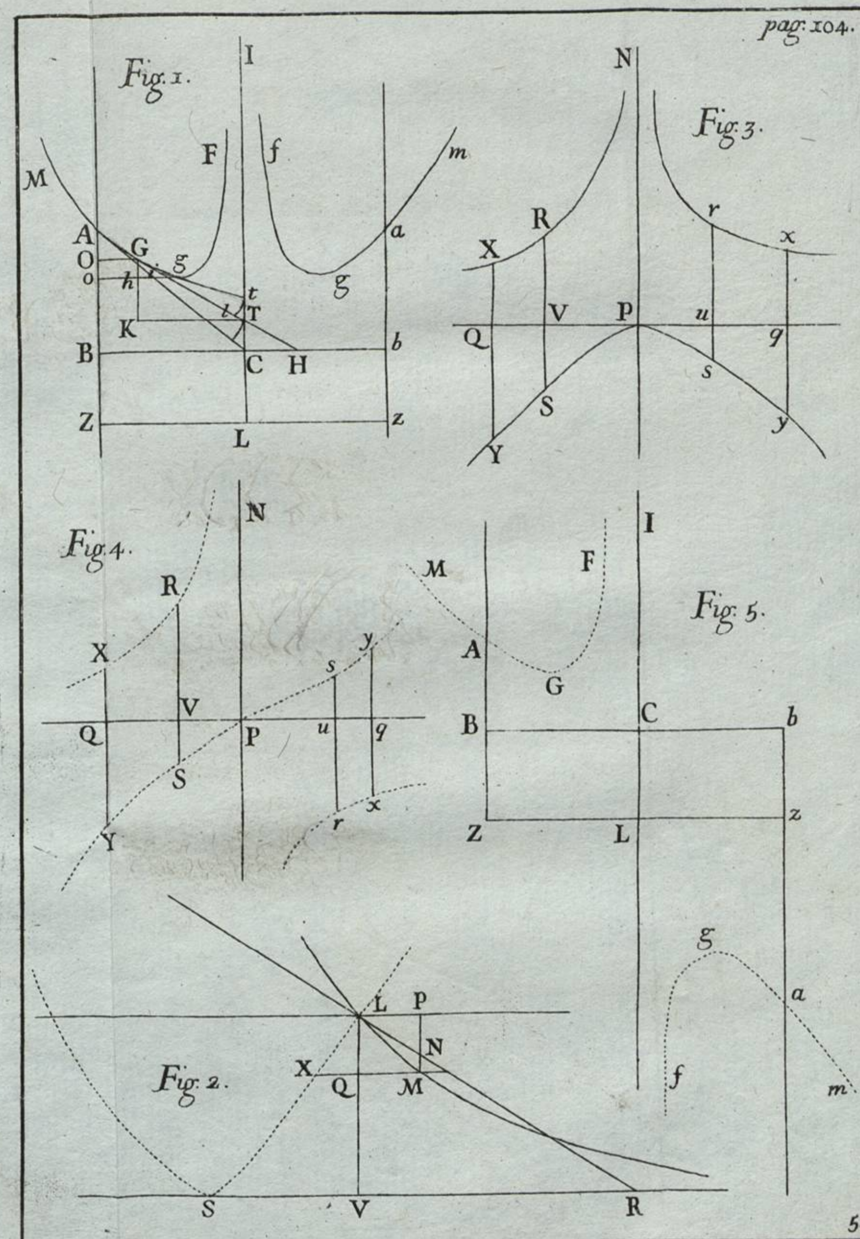
Ex præparatione hujuſmodi oritur conſtructio. Aſſumpta PQ $=c$ erigantur duæ normales (*Fig.* 3, 4) QX, QY, quarum prima $=\frac{a-b}{2n-2}$, altera $=\frac{a+b}{2n+2}$. Tum rectæ PQ erecta perpendiculari indefinita PN inter aſſymptotos PN, PQ deſcribatur hyperbola ordinis $\overline{n-1}^{\,eſimi}$ tranſiens per punctum X; & vertice P deſcribatur parabola ordinis $\overline{n+1}^{\,eſimi}$ tranſiens per punctum Y: tum ſit PV $=u$, erit VR $=r$, VS $=t$: Ergo RS $=t+r$ $=z$ ex æquatione vigeſima octava. Igitur ſi deſcribatur curva, cujus altera ex coordinatis ſit PV, altera RS, hæc illa ipſa erit, quam quærimus.

Sed antequam progredimur, oportet determinare poſitionem alterius rami cum hyperbolæ, tum parabolæ. Si numerus n eſt impar, tum $n+1$, tum $n-1$ erit par. Quare ejus rami poſitio ea erit, quam indicat (*Fig.* 3). Verum ſi n eſt numerus par, quoniam tam $n+1$, quam $n-1$ impar eſt, ejus rami poſitio tum

tum in hyperbola, tum in parabola in (*Fig.* 4) determinatur. Quapropter in primo caſu vel PV $= u$ poſitivæ ſint, vel negativæ, RS $= z$ ſemper poſitivæ exiſtunt; ſed in altero caſu ſi PV $= u$ poſitivæ ſunt, RS $= z$ item erunt poſitivæ, at ſi illæ negativæ erunt, iſtæ quoque erunt negativæ.

Hiſce conſtitutis difficile minime eſt videre in caſu n imparis oriri curvam MAGF, cujus progreſſus exponitur a (*Fig.* 1); at in caſu n paris curvam gigni, cujus progreſſus ob oculos ponitur a (*Fig.* 5). Recta $Zz = Qq = 2QP$, & $ZA = XY$, ſicuti $za = xy$. Ramus autem $fgam$ ſimilis eſt, & æqualis FGAM, & eodem modo poſitus reſpectu lineæ Zz, ſed in primo caſu ad eaſdem partes, in ſecundo ad oppoſitas jacet. Hæc autem ſufficiant pro ſolutione hujuſce problematis; quæ enim reliquæ ſunt conſtructiones, eadem prorſus methodo peraguntur.

OPU-


pag. 104.
Fig. 1.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 2.
5.

OPUSCULUM SEXTUM.

Epiſtolæ tres, in quibus æquationes aliquæ differentiales evolvuntur per ſeries.

EPISTOLA PRIMA

VINCENTIUS RICCATUS

JOSEPHO SUZZIO

In Patavina Univerſitate P. Philoſophiæ P.

S. P. D.

OCcurrunt ſæpenumero, ut noſti vir doctiſſime, ejuſmodi formulæ differentiales, quæ tametſi tanquam difficillimæ negliguntur ab analyſtis, tamen ſi opportuna methodo tractentur, non ineleganter evolvuntur. Hujus generis eſt formula

(I) $du = \frac{adx}{z}$, in qua z datur per x in æquatione

(II) ec. $S\frac{dx}{z}\overline{S\frac{dx}{z}\overline{S\frac{dx}{z}\overline{S\frac{xdx}{z}}}} = z$. Etenim methodus mihi cognita eſt, qua invenitur x per ſeriem ex ſola u, & conſtantibus coaleſcentem. Hanc autem methodum ad te ſcribere conſtitui, ut quanti facienda ſit, ex tuo judicio cognoſcam.

In formula II pro $\frac{dx}{z}$ ſubſtitue $\frac{du}{a}$; æquales enim eſſe haſce quantitates, formula I docet. Oritur autem æquatio

(III) ec. $S\frac{du}{a}\overline{S\frac{du}{a}\overline{S\frac{du}{a}\overline{S\frac{xdu}{a}}}} = z$, atqui ex formula I $z = \frac{adx}{du}$: Ergo ec. $S\frac{du}{a}\overline{S\frac{du}{a}\overline{S\frac{du}{a}\overline{S\frac{xdu}{a}}}} = \frac{adx}{du}$: Igitur multiplicando per $\frac{du}{a}$, & integrando fiet

---

(IV) ec. $\overline{S\frac{du}{a}\,S\frac{du}{a}\,S\frac{du}{a}\,S\frac{du}{a}\,S\frac{x\,du}{a}} = x$, in qua formula numerus ſignorum S unitate ſuperat numerum ſignorum eorumdem, quæ inſunt in formula II.

Ex formula IV facillime invenietur ope ſerierum x data per u. Fiat enim

(V) $x = A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4 + Fu^5$ ec.

Supponamus, in formula II unicum adeſſe ſignum ſummatorium, duplex in IV, ut fiat

$$\overline{S\frac{du}{a}\,S\frac{x\,du}{a}} = A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4 + Fu^5 \text{ ec.}$$

Differentietur æquatio, & multiplicetur per $\frac{a}{du}$, ut ſit

$$S\frac{x\,du}{a} = aB + 2aCu + 3aDu^2 + 4aEu^3 + 5aFu^4 + 6aGu^5 \text{ ec.}$$

Facta iterum differentiatione, eademque multiplicatione, orietur

$$x = 2a^2C + 2.3a^2Du + 3.4a^2Eu^2 + 4.5a^2Fu^3 + 5.6a^2Gu^4 + 6.7a^2Hu^5 \text{ ec.}$$

quæ ſeries debet eſſe identica cum ſerie præſuppoſita æquationis V.

Si duarum ſerierum termini comparentur, invenietur

$$C = \frac{A}{2a^2} \qquad E = \frac{A}{2.3.4\,a^4} \qquad G = \frac{A}{2.3.4.5.6.a^6} \text{ ec.}$$

$$D = \frac{B}{2.3.a^2} \qquad F = \frac{B}{2.3.4.5.a^4} \qquad H = \frac{B}{2.3.4.5.6.7.a^6} \text{ ec.},$$

ex quibus determinationibus conſtat, duas quantitates A, B indeterminatas manere, quæ in ſingulis caſibus erunt determinandæ. Quapropter habebimus

$$x = \begin{cases} A + \dfrac{Au^2}{2a^2} + \dfrac{Au^4}{2.3.4.a^4} + \dfrac{Au^6}{2.3.4.5.6.a^6} \text{ ec.} \\[2ex] Bu + \dfrac{Bu^3}{2.3.a^2} + \dfrac{Bu^5}{2.3.4.5.a^4} + \dfrac{Bu^7}{2.3.4.5.6.7.a^6} \text{ ec.} \end{cases}$$

Supponamus deinde in æquatione II duo ineſſe ſigna ſummatoria, tria in IV. Factis iiſdem operationibus, quibus in caſu ſuperiore uſi ſumus, perveniemus ad æquationem

$$S\frac{x\,du}{a} = 2a^2C + 2.3a^2Du + 3.4Eu^2 + 4.5Fu^3 + 5.6Gu^4 \text{ ec.}$$

Ergo differentiando, & dividendo per $\frac{du}{a}$ orietur

$x =$

$$x = 2.3.a^3 D + 2.3.4.a^3 Eu + 3.4.5.a^3 Fu^2 + 4.5.6.a^3 Gu^3 + 5.6.7.a^3 Hu^4 \text{ ec.}$$

quæ ſeries identica ſit oportet cum ſerie V.

Quapropter ſi comparentur termini, obtinebuntur ſequentes determinationes

$$D = \frac{A}{1.2.3.a^3} \quad G = \frac{A}{1.2.3.4.5.6.a^6} \quad K = \frac{A}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.a^9} \text{ ec.}$$

$$E = \frac{B}{2.3.4.a^3} \quad H = \frac{B}{2.3.4.5\ 6.7.a^6} \quad L = \frac{B}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.a^9} \text{ ec.}$$

$$F = \frac{C}{3.4.5.a^3} \quad I = \frac{C}{3.4.5.6.7.8.a^6} \quad M = \frac{C}{3.4.5.6.7.8.9.10.11.a^9} \text{ ec.,}$$

ex quibus determinationibus conſtat, tres quantitates A, B, C indeterminatas manere. Itaque erit

$$A + \frac{Au^3}{1.2.3.a^3} + \frac{Au^6}{1.2.\ldots 5.6.a^6} + \frac{Au^9}{1.2.\ldots 8.9.a^9} \text{ ec.}$$

$$x = Bu + \frac{Bu^4}{2.3.4.a^3} + \frac{Bu^7}{2.3.\ldots 6.7.a^6} + \frac{Bu^{10}}{2.3.\ldots 9.10.a^9} \text{ ec.}$$

$$Cu^2 + \frac{Cu^5}{3.4.5.a^3} + \frac{Cu^8}{3.4.\ldots 7.8.a^6} + \frac{Cu^{11}}{3.4.\ldots 10.11.a^9} \text{ ec.}$$

Si tria adſint ſigna ſummatoria in æquatione II, quatuor in IV, eadem inſtituta analyſi inveniemus.

$$S\frac{x\,du}{a} = 2.3.a^3 D + 2.3.4.a^3 Eu + 3.4.5.a^3 Fu^2 + 4.5.6.a^3 Gu^3 \text{ ec.}$$

Hæc differentietur, & multiplicetur per $\frac{a}{du}$, ut fiat

$$x = 2.3.4.a^4 E + 2.3.4.5.a^4 Fu + 3.4.5.6.a^4 Gu^2 + 4.5.6.7.a^4 Hu^3 \text{ ec.,}$$

cujus termini comparati cum terminis ſeriei V exhibent

$$E = \frac{A}{1.2.3.4.a^4} \quad I = \frac{A}{1.2.3.\ldots 7.8.a^8} \quad N = \frac{A}{1.2.3.\ldots 11.12.a^{12}} \text{ ec.}$$

$$F = \frac{B}{2.3.4.5.a^4} \quad K = \frac{B}{2.3.4.\ldots 8.9.a^8} \quad O = \frac{B}{2.3.4.\ldots 12.13.a^{12}} \text{ ec.}$$

$$G = \frac{C}{3.4.5.6.a^4} \quad L = \frac{C}{3.4.5.\ldots 9.10.a^8} \quad P = \frac{C}{3.4.5.\ldots 13.14.a^{12}} \text{ ec.}$$

$$H = \frac{D}{4.5.6.7.a^4} \quad M = \frac{D}{4.5.6\ldots 10.11.a^8} \quad Q = \frac{D}{4.5.6\ldots 14.15.a^{12}} \text{ ec.},$$

in quo caſu quatuor quantitates A, B, C, D adhuc determinandæ ſuperſunt. Quapropter habebimus

$$x = \begin{cases} A + \frac{Au^4}{1.2.3.4.a^4} + \frac{Au^8}{1.2.3\ldots 7.8.a^8} + \frac{Au^{12}}{1.2.3\ldots 11.12.a^{12}} \text{ ec.} \\ Bu + \frac{Bu^5}{2.3.4.5.a^4} + \frac{Bu^9}{2.3.4\ldots 8.9.a^8} + \frac{Bu^{13}}{2.3.4\ldots 12.13.a^{12}} \text{ ec.} \\ Cu^2 + \frac{Cu^6}{3.4.5.6.a^4} + \frac{Cu^{10}}{3.4.5\ldots 9.10.a^8} + \frac{Cu^{14}}{3.4.5\ldots 13.14.a^{12}} \text{ ec.} \\ Du^3 + \frac{Du^7}{4.5.6.7.a^4} + \frac{Du^{11}}{4.5.6\ldots 10.11.a^8} + \frac{Du^{15}}{4.5.6\ldots 14.15.a^{12}} \text{ ec.} \end{cases}$$

Methodus jam ſatis aperte docet, quo pacto coefficientes ſeriei V ſuppoſitæ in reliquis caſibus determinandi veniant. Ita ſi quatuor ſigna ſummatoria in formula II, quinque in IV reperiantur, quinque quantitates indeterminatæ remanebunt, nimirum A, B, C, D, E, ex quibus aliæ omnes determinationem accipient hac ratione

$$x = \begin{cases} A + \frac{Au^5}{1.2.3.4.5.a^5} + \frac{Au^{10}}{1.2.3\ldots 9.10.a^{10}} + \frac{Au^{15}}{1.2.3\ldots 14.15.a^{15}} \text{ ec.} \\ Bu + \frac{Bu^6}{2.3.4.5.6.a^5} + \frac{Bu^{11}}{2.3.4\ldots 10.11.a^{10}} + \frac{Bu^{16}}{2.3.4\ldots 15.16.a^{15}} \text{ ec.} \\ Cu^2 + \frac{Cu^7}{3.4.5.6.7.a^5} + \frac{Cu^{12}}{3.4.5\ldots 11.12.a^{10}} + \frac{Cu^{17}}{3.4.5\ldots 16.17.a^{15}} \text{ ec.} \\ Du^3 + \frac{Du^8}{4.5.6.7.8.a^5} + \frac{Du^{13}}{4.5.6\ldots 12.13.a^{10}} + \frac{Du^{18}}{4.5.6\ldots 17.18.a^{15}} \text{ ec.} \\ Eu^4 + \frac{Eu^9}{5.6.7.8.9.a^5} + \frac{Eu^{14}}{5.6.7\ldots 13.14.a^{10}} + \frac{Eu^{19}}{5.6.7\ldots 18.19.a^{15}} \text{ ec.} \end{cases}$$

Ex qua progreſſione tempore brevi, tenuique labore in caſibus magis compoſitis coefficientes ſeriei V determinabis.

Idem

Idem dicas velim de æquatione

(VI) $du = \frac{-a\,dx}{z}$, ſi u data ſit per x in formula

(VII) ec. $S\frac{-dx}{z}\,S\frac{-dx}{z}\,S\frac{-dx}{z}\,S\frac{-x\,dx}{z} = z$. Namque eandem uſurpans methodum invenies

(VIII) ec. $S\frac{du}{a}\,S\frac{du}{a}\,S\frac{du}{a}\,S\frac{du}{a}\,S\frac{x\,du}{a} = -x$: ex qua præſuppoſita iterum ſerie V iidem prorſus coefficientes exurgent, ſed cum aliqua varietate ſignorum. Namque coefficientes, qui indeterminati remanent, & qui in noſtris ſeriebus conſtituunt primam columnam verticalem, ſi ſigno + afficiantur, qui formant ſecundam columnam verticalem, afficientur ſigno —, qui tertiam, ſigno +, atque ita deinceps alternantibus ſemper ſignis verticalium columnarum ita, ut illis, quæ tenent ſedes impares, præfigendum ſit ſignum +, illæ vero, quæ occupant ſedes pares, ſigno — ſint afficiendæ.

Ex his, quæ in hac epiſtola dilucide explicata ſunt, proclive eſt cognitu, æquationis II utramque indeterminatam x, z datam reperiri per ſeries ex tertia indeterminata u coaleſcentes. Etenim poſita $du = \frac{a\,dx}{z}$ inventa eſt ſupra x æqualis ſeriei expreſſe per u. Sit porro $x = A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4$ ec.,
cujus ſeriei coefficientes in ſingulis caſibus determinavimus. Fiat differentiatio, & erit

$dx = B\,du + 2Cu\,du + 3Du^2\,du + 4Eu^3\,du$ ec. Ergo

$\frac{a\,dx}{du} = z = aB + 2aCu + 3aDu^2 + 4aEu^3$ ec.,

per quam ſeriem z definita eſt.

Quæ quum ita ſint, ſi unicum dumtaxat ſignum ſummatorium habeatur in æquatione II, fiet

$$z = \begin{cases} + \frac{Au}{a} + \frac{Au^3}{2.3.a^3} + \frac{Au^5}{2.3.4.5.a^5} \text{ ec.} \\ aB + \frac{Bu^2}{2a} + \frac{Bu^4}{2.3.4.a^3} + \frac{Bu^6}{2.3.4.5.6.a^5} \text{ ec.} \end{cases}$$

Si

Si in eadem æquatione duo inexiſtant ſigna ſummatoria, habebimus

$$\begin{array}{llll} & + \frac{Au^2}{1.\,2.\,a^2} & + \frac{Au^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,a^5} & + \frac{Au^8}{1.\,2.\,.\,.\,7.\,8.\,a^8} \text{ ec.} \\ z = aB & + \frac{Bu^3}{2.\,3.\,a^2} & + \frac{Bu^6}{2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,a^5} & + \frac{Bu^9}{2.\,3.\,.\,.\,8.\,9.\,a^8} \text{ ec.} \\ 2aCu & + \frac{Cu^4}{3.\,4.\,a^2} & + \frac{Cu^7}{3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,a^5} & + \frac{Cu^{10}}{3.\,4.\,.\,.\,9.\,10.\,a^8} \text{ ec.} \end{array}$$

In caſibus autem magis compoſitis ſeries nanciſcemur ſecundum eam, quæ conſpicua eſt, progreſſionem.

Idem dicendum eſt de æquatione VII, in qua ſuppoſita x eidem ſeriei æquali invenietur

$z = -aB - 2aCu - 3aDu^2 - 4aEu^3$ ec. Per quam facile cognoſces in ſingulis caſibus eaſdem prorſus ſeries oriri cum aliqua tamen varietate ſignorum. Nam in terminis, qui conſtituunt primam, tertiam, quintam, & alias impares columnas verticales, habebitur ſignum —, in illis, qui formant ſecundam, quartam, & alias columnas pares, relinquendum eſt ſignum +.

Poſſet theorema alia ratione enunciari; nempe data formula $du = \pm \frac{adx}{z}$ inveniri poterit x per ſeriem compoſitam ex ſolis u, quum z data fuerit per x in ſequenti æquatione

$$\frac{\pm x\,dx}{\text{ec. } D \pm \frac{z}{dx}\,\overline{D \pm \frac{z}{dx}\,\overline{D \pm \frac{z}{dx}\,\overline{D \pm \frac{z\,dz}{dx}}}}} = z.$$

Nam hæc ad ſequentem reducitur

$$x = \pm \frac{z}{dx}\,.\,\overline{\text{ec. } D \pm \frac{z}{dx}\,\overline{D \pm \frac{z}{dx}\,\overline{D \pm \frac{z}{dx}\,\overline{D \pm \frac{z\,dz}{dx}}}}},$$

in qua ſi pro $\pm \frac{z}{dx}$ ſubſtituatur $\frac{a}{du}$, & pro dz ſubſtituatur $D \pm \frac{adx}{du}$, fiet

$$x = \frac{a}{du}\,.\,\overline{\text{ec. } D \frac{a}{du}\,\overline{D \frac{a}{du}\,\overline{D \frac{a}{du}\,\overline{D \frac{a}{du}\,\overline{D \pm \frac{adx}{du}}}}}}.$$

Hæc æquatio ſi tractetur methodo illa, qua antea uſi fuimus, dabit variabilem x æqualem ſeriei infinitæ compoſitæ ex ſola u. Nimirum ſupponenda eſt x æqualis ſeriei, cujus coefficientes ſint

inde-

indeterminati: tum inſtituenda eſt æquatio inter hanc ſeriem, & formulam $= x$ modo inventam: demum alternatim multiplicanda eſt ſeries per $\frac{du}{a}$, & integranda, donec invenies aliam ſeriem $= x$, quæ collata cum ſuperiore coefficientes determinabit.

Series quæ hac ratione enaſcentur, eædem prorſus invenientur cum illis, quas ex prima methodo deſcripſimus. Neque hoc mirum videri debet, namque utraque methodus eaſdem formulas adhibet, ſed diverſo modo diſpoſitas. Æquationem ſecundæ methodi, in qua z datur per x, ita diſtribue

$$\pm \frac{xdx}{z} = \text{ec. } \overline{D \pm \frac{z}{dx} \overline{D \pm \frac{z}{dx} \overline{D \pm \frac{z}{dx} D \pm \frac{zdz}{dx}}}}.$$

Quam æquationem integra, & multiplica per $\pm \frac{dx}{z}$, ut habeas

$$\pm \frac{dx}{z} S \pm \frac{xdx}{z} = \text{ec. } \overline{D \pm \frac{z}{dx} \overline{D \pm \frac{z}{dx} D \pm \frac{zdz}{dx}}}.$$

Has autem operationes toties perage, quoties opus fuerit, & invenies

$$\text{ec. } \overline{S \pm \frac{dx}{z} \overline{S \pm \frac{dx}{z} \overline{S \pm \frac{dx}{z} \overline{S \pm \frac{dx}{z} S \pm \frac{xdx}{z}}}}} = z,$$

quæ æquatio illa ipſa eſt, in qua datam ſuppoſuimus x per z in prima methodo.

De hoc theoremate, poſtquam illud examinaveris diligentius, quodnam ſit judicium tuum, ut mihi ſcribas, rogo. Fac valeas.

Patavium ad Cl. Joſephum Suzzium
Bononiæ 3 kal. Octobris 1752.

EPI-

EPISTOLA ALTERA

VINCENTIUS RICCATUS

JOSEPHO SUZZIO

In Patavina Univerſitate P. Philoſophiæ P.

S. P. D.

QUamquam methodus æquationum evolvendarum plurimi ſemper mihi facienda viſa eſt, quia uſuvenire poteſt, ut problema aliquod non cognita methodo inſolutum relinquatur: tamen a pleriſque contemnitur, niſi inſignis aliquis uſus protinus pateſiat. Itaque ne in horum hominum reprehenſionem incurram, ejus theorematis, de quo tibi ſcripſi, uſum in caſu maxime ſimplici aperiam.

Quamobrem in formula II, & VII, ſuppono unicum ineſſe ſignum ſummatorium ita, ut utraque hanc formam accipiat $S \pm \frac{x\,dx}{z} = z$: ſignum ſuperius pertinet ad æquationem II, inferius ad VII: Igitur facta differentiatione $\pm \frac{x\,dx}{z} = dz$, ſive $\pm\, x\,dx = z\,dz$, & integrando primum ſine additione conſtantis, & eliminando communem diviſorem 2, erit $\pm\, x^2 = z^2$, in qua ne incurramus in imaginaria, aſſumendum eſt ſignum ſuperius. Extracta itaque radice fiet $x = z$. Quare formula I (aſſumendum eſt enim ſignum ſuperius) erit $du = \frac{a\,dx}{x}$: quæ æquatio pertinet ad logarithmicam ita, ut x exiſtentibus numeris, u ſint eorum logarithmi.

In prioribus litteris inveni

$$x = \begin{cases} A + \frac{A u^2}{2.\, a^2} + \frac{A u^4}{2.\,3.\,4.\, a^4} \text{ ec.} \\ B u + \frac{B u^3}{2.\,3.\, a^2} + \frac{B u^5}{2.\,3.\,4.\,5.\, a^4} \text{ ec.} \end{cases}$$

Ut duorum coefficientium A, B determinationem faciamus, adverten-

tendum eſt primo, facta $u = o$, arbitrarium eſſe valorem x, ſeu poſſe pro libito eligi quemcumque numerum, cujus logarithmus $u = o$. Sit hic numerus $= f$: Ergo poſita $u = o$, debebit $x = f$: ſed poſita $u = o$, habetur $x = A$: Igitur $A = f$. Determinatæ quantitate A, ut B etiam determinetur, fac deinde advertas $\frac{dx}{du} = \frac{x}{a}$: Ergo poſita $u = o$, & $x = f$ erit $\frac{dx}{du} = \frac{f}{a}$. Jam vero ſi æquatio inventa differentietur, & dividatur per du, & fiat $u = o$, invenietur $\frac{dx}{du} = B$: Ergo $B = \frac{f}{a}$.

Hiſce determinationibus effectis habebimus

$$x = f + \frac{fu}{a} + \frac{fu^2}{2a^2} + \frac{fu^3}{2.3.a^3} + \frac{fu^4}{2.3.4.a^4} \text{ ec.}$$

Si per Nu exprimatur numerus, cujus logarithmus ſit $= u$, erit $Nu = x$: Igitur

$$Nu = f + \frac{fu}{a} + \frac{fu^2}{2a^2} + \frac{fu^3}{2.3.a^3} + \frac{fu^4}{2.3.4.a^4} \text{ ec.},$$ per quam dato logarithmo invenietur numerus. In extractione radicis æquationis $xx = zz$ poſſet accipi ſignum — hoc modo $-x = z$: quo in caſu prodiiſſet $-du = \frac{adx}{x}$: quare u fieret negativa, & termini impares noſtræ ſeriei ſigno — afficerentur.

Quod ſi fieret $f = a$, tum logarithmi hyperbolici ſumendi eſſent. Sed quum de logarithmis, & de multiplici logarithmorum ſyſtemate opuſ. 3 fuſius loquutus fuerim, hæc in præſentia adnotaſſe ſufficiat.

Quare ad alia progredientes æquationem inventam $\pm xdx = zdz$ integremus cum additione conſtantis, ut habeamus $b \pm \frac{x^2}{2} = \frac{z^2}{2}$, ſive $2b \pm x^2 = z^2$. Si valeat ſignum ſuperius, b eſſe poteſt cum negativa tum poſitiva: propterea ſi fiat $2b = \pm aa$, erit $xx \pm aa = zz$, ſive $\sqrt{xx \pm aa} = z$, ex qua oriuntur duæ formulæ $du = \frac{adx}{\sqrt{xx + aa}}$, $du = \frac{adx}{\sqrt{xx - aa}}$. In utraque, ut conſtat ex prioribus litteris, valet.

$$x = \frac{A + \frac{A u^2}{2. a^2} + \frac{A u^4}{2. 3. 4. a^4} + \frac{A u^6}{2. 3. 4. 5. 6. a^6} \text{ ec.}}{B u + \frac{B u^3}{2. 3. a^2} + \frac{B u^5}{2. 3. 4. 5. a^4} + \frac{B u^7}{2. 3. 4. 5. 6. 7. a^6} \text{ ec.}}$$

Si inferius ſignum accipiatur, ut imaginaria vitentur, b tanquam poſitiva accipienda erit: quare poſita $2b = aa$ fiet $aa - xx = zz$, & $\sqrt{aa - xx} = z$. Æquatio itaque orietur $du = \frac{-adx}{\sqrt{aa - xx}}$, pro qua ſeries inventa hanc formam accipiet

$$x = \frac{A - \frac{A u^2}{2 a^2} + \frac{A u^4}{2. 3. 4. a^4} - \frac{A u^6}{2. 3. 4. 5. 6. a^6} \text{ ec.}}{B u - \frac{B u^3}{2. 3. a^2} + \frac{B u^5}{2. 3. 4\ 5. a^4} - \frac{B u^7}{2. 3. 4. 5. 6. 7. a^6} \text{ ec.}}$$

Ut in his ſeriebus quantitates A, B determinationem accipiant, advertamus $\frac{-adx}{\sqrt{aa - xx}}$ eſſe elementum arcus circularis expreſſum per ſinum, aut coſinum, ſive quod idem eſt, u eſſe arcum circularem, cujus ſinus, aut coſinus $= x$: poteſt enim $\sqrt{aa - xx}$ accipi cum poſitive, tum negative. Sed ut analogia cum hyperbola clarior fiat, ita propoſitionem exprimamus. In æquatione $du = \frac{-adx}{\sqrt{aa - xx}}$, u exprimit duplum ſectorem circularem ACF (*Fig.* 1) diviſum per radium $CA = a$, exiſtente aut GF, aut $CG = x$. Similiter in æquatione $du = \frac{adx}{\sqrt{xx + aa}}$, u deſignat (*Fig.* 2) duplum ſectorem hyperbolicum ACF diviſum per ſemiaxem $CA = a$, exiſtente $GF = x$, ſi valeat ſignum ſuperius, $CG = x$, ſi valeat inferius. Quando autem in circulo GF (*Fig.* 1) dicitur ſinus, CG coſinus quantitatis u: ita per analogiam in hyperbola GF (*Fig.* 2) vocari poteſt ſinus hyperbolicus, CG coſinus hyperbolicus quantitatis u, ſeu dupli ſectoris ACF diviſi per CA. Ad deſignandos autem ſinus, & coſinus circulares quantitatis u utar his ſignis $Sc.u$, $Cc.u$. Signa autem $Sb.u$, $Cb.u$ ſignificabunt ſinus, & coſinus hyperbolicos.

His ſuppoſitis ſi x ſignificet coſinum tam in circulo, quam in

in hyperbola, poſita $u = o$, eſt $x = a$, & $\frac{dx}{du} = o$. Contra ſi x denotet ſinum, poſita $u = o$, eſt $x = o$, & $\frac{dx}{du} = 1$. His cognitis apparet
pro coſinu $A = a$, $B = o$,
pro ſinu $A = o$, $B = 1$. Hæ determinationes hujuſmodi ſeries ſuppeditant

$$Ch.u = a + \frac{u^2}{2a} + \frac{u^4}{2.3.4.a^3} + \frac{u^6}{2.3.4.5.6.a^5} \text{ ec.}$$

$$Sh.u = u + \frac{u^3}{2.3.a^2} + \frac{u^5}{2.3.4.5.a^4} + \frac{u^7}{2.3.4.5.6.7.a^6} \text{ ec.}$$

$$Cc.u = a - \frac{u^2}{2.a} + \frac{u^4}{2.3.4.a^3} - \frac{u^6}{2.3.4.5.6.a^5} \text{ ec.}$$

$$Sc.u = u - \frac{u^3}{2.3.a^2} + \frac{u}{2.3.4.5.a^4} - \frac{u^7}{2.3.4.5.6.7.a^6} \text{ ec.}$$

Coſinui hyperbolico addatur, ac detrahatur ſinus hyperbolicus, & fiet

$$Ch.u \pm Sh.u = a \pm u + \frac{u^2}{2a} \pm \frac{u^3}{2.3.a^2} + \frac{u^4}{2.3.4.a^3} \pm \frac{u^5}{2.3.4.5.a^4} \text{ ec.},$$

quæ ſeries, quum indicet numerum, cujus logarithmus hyperbolicus $= u$, conſtat $Ch.u \pm Sh.u$ æquare numerum, cujus logarithmus hyperbolicus $= u$.

Quod ſi multiplicata expreſſione ſinus circularis per $\sqrt{-1}$ eædem fiant operationes, proveniet $Cc.u \pm \sqrt{-1}.Sc.u$

$$= a \pm u\sqrt{-1} - \frac{u^2}{2a} \mp \frac{u^3\sqrt{-1}}{2.3.a^2} + \frac{u^4}{2.3.4.a^3} \pm \frac{u^5\sqrt{-1}}{2.3.4.5.a^4} \text{ ec.}$$

quæ ſeries oritur, quotieſcumque in ſuperiore pro u ſubſtituatur $u\sqrt{-1}$. Quapropter $Cc.u \pm \sqrt{-1}.Sc.u$ æquat numerum, cujus logarithmus hyperbolicus eſt quantitas imaginaria, nempe $u\sqrt{-1}$.

Si poſito i æquali numero infinito, binomium $\overline{1 \pm \frac{u}{ia}}^{\,i}$ methodo notiſſima evolvatur in ſeriem, fiet

$$1 \pm \frac{iu}{ia} + \frac{i.\overline{i-1}.u^2}{2i^2a^2} \pm \frac{i.\overline{i-1}.\overline{i-2}.u^3}{2.3.i^3a^3} + \frac{i.\overline{i-1}.\overline{i-2}.\overline{i-3}.u^4}{2.3.4.i^4a^4} \pm \text{ ec.}$$

atqui quum i infinitus ſit numerus, erit $i-1$, $i-2$, $i-3$ ec. ſemper $= i$: Ergo facta ſubſtitutione, & opportuna diviſione habebimus

$$\overline{1 \pm \frac{u}{ia}}^{\,i} = 1 \pm \frac{u}{a} + \frac{u^2}{2.a^2} \pm \frac{u^3}{2.3.a^3} + \frac{u^4}{2.3.4.a^4} \pm \frac{u^5}{2.3.4.5.a^5} \text{ ec.}$$

atqui hæc ſeries $= \frac{Cb.u \pm Sb.u}{a}$ ex ſuperioribus: Ergo $\frac{Cb.u \pm Sb.u}{a}$ $= \overline{1 \pm \frac{u}{ia}}^{\,i}$. Quapropter ex combinatione ſignorum inveniemus

$$\frac{2Cb.u}{a} = \overline{1 + \frac{u}{ia}}^{\,i} + \overline{1 - \frac{u}{ia}}^{\,i}$$

$$\frac{2Sb.u}{a} = \overline{1 + \frac{u}{ia}}^{\,i} - [\overline{1 - \frac{u}{ia}}^{\,i}.$$

Simili ratione ſi evolvamus in ſeriem binomium $\overline{1 \pm \frac{u\sqrt{-1}}{ia}}^{\,i}$ inveniemus, illud æquale eſſe ſeriei

$$1 \pm \frac{u\sqrt{-1}}{a} - \frac{u^2}{2a^2} \mp \frac{u^3\sqrt{-1}}{2.3.a^3} + \frac{u^4}{2.3.4.a^4} \pm \frac{u^5\sqrt{-1}}{2.3.4.5.a^5} \text{ ec.;}$$

quæ ſeries quum æquet $\frac{Cc.u \pm \sqrt{-1}\,Sc.u}{a}$, orietur $\frac{Cc.u \pm \sqrt{-1}\,Sc.u}{a}$ $= \overline{1 \pm \frac{u\sqrt{-1}}{ia}}^{\,i}$; ex qua ob ambigua ſigna inveniemus

$$2Cc.u = \overline{1 + \frac{u\sqrt{-1}}{ia}}^{\,i} + \overline{1 - \frac{u\sqrt{-1}}{ia}}^{\,i}$$

$$2\sqrt{-1}.Sc.u = \overline{1 + \frac{u\sqrt{-1}}{ia}}^{\,i} - [\overline{1 - \frac{u\sqrt{-1}}{ia}}^{\,i}, \text{ ſive}$$

2 Se.

$$2Se.u = \frac{\overline{1 + \frac{u\sqrt{-1}}{ia}}^{\,i} - [\overline{1 - \frac{u\sqrt{-1}}{ia}}^{\,i}}{\sqrt{-1}}.$$ Quæ expreſſiones tametſi omnes involvant quantitatem infinitam i, & illæ, quæ ad circulum pertinent etiam quantitates imaginarias; tamen quum inventus fuerit earum valor realis, maximam in calculo habent utilitatem.

Hæc dicta ſufficiant ad oſtendendum uſum non contemnendum theorematis in ſuperioribus meis litteris demonſtrati. Si quid reprehendendum invenias, vir doctiſſime, rogo te etiam, atque etiam, ut me admoneas. Vale.

Patavium ad Cl. Joſephum Suzzium
Bononiæ Poſtridie Idus Nov. 1752.

EPI-

EPISTOLA TERTIA

VINCENTIUS RICCATUS

JOSEPHO SUZZIO

In Patavina Univerſitate P. Philoſophiæ P.

S. P. D.

ADmonui in primis, quas ad te miſi litteras, æquationis ec. $\overline{S\frac{dx}{z}\overline{S\frac{dx}{z}S\frac{xdx}{z}}} = z$ indeterminatam utramque x, z inveniri per ſeriem, quæ ex tertia quantitate u componatur: quæ animadverſio plurimum conducit ad inveniendos reſpondentes valores x, z. Quoniam vero ſi ſequamur methodum productam ab Eulero tom. 6 Ac. Petropolitanæ, eadem formula in aliam transformari poteſt, eandem utilitatem in formulas transformatas licet derivare.

Fac igitur $x = c^{Sydt}$, $z = c^{Sydt}m$, in quibus c eſt quantitas cujus logarithmus unitatem æquat, m autem eſt quantitas indeterminata, quæ in analyſeos progreſſu determinanda erit per t, aut y. Facta primæ formulæ differentiatione invenies $dx = c^{Sydt}ydt$, quæ ſi dividatur per alteram erit $\frac{dx}{z} = \frac{ydt}{m}$. In æquatione igitur hoſce valores ſubſtitue, ut obtineas ec. $\overline{S\frac{ydt}{m}\overline{S\frac{ydt}{m}Sc^{Sydt}\frac{ydt}{m}}} = c^{Sydt}m$.

Supponamus primo, in hac unicum ineſſe ſignum ſummatorium, ut ſit $Sc^{Sydt}\frac{ydt}{m} = c^{Sydt}m$: Ergo ſumptis differentiis $c^{Sydt}\frac{ydt}{m} = c^{Sydt}.\overline{dm + mydt}$: Ergo $1 = \frac{m}{ydt}.\overline{dm + mydt}$.

Si in ſuppoſita æquatione duo exiſtant ſigna ſummatoria, & voces $\frac{m}{ydt}.\overline{dm + mydt} = n$, eadem methodo invenies $Sc^{Sydt}\frac{ydt}{m} = c^{Sydt}n$, ex qua acceptis differentiis orietur $1 = \frac{m}{ydt}.\overline{dn + nydt}$.

Simi-

Similiter vocando $\frac{m}{ydt} . \overline{dn + nydt} = p$, ubi tria adſint ſigna ſummatoria, nanciſceris $1 = \frac{m}{ydt} . \overline{dp + pydt}$.

Si ſigna ſummatoria exiſtant quatuor, reperies $1 = \frac{m}{ydt} . \overline{dq + qydt}$, facta $q = \frac{m}{ydt} . \overline{dp + pydt}$: atque ita in infinitum.

Ut harum æquationum indeterminatæ y, t inveniantur per ſeries compoſitas ab indeterminata u, memento in primis litteris poſitam fuiſſe
$x = A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4$ ec., hujuſque ſeriei coefficientes pro ſingulis caſibus fuiſſe determinatos. Si accipiantur differentiæ, fiet
$dx = Bdu + 2Cudu + 3Du^2du + 4Eu^3du$ ec. $= \frac{zdu}{a}$ ut ex eiſdem litteris conſtat. Quare
$z = a . \overline{B + 2Cu + 3Du^2 + 4Eu^3 \text{ ec.}}$, cujus differentias ſumentes invenimus
$dz = a . \overline{2Cdu + 2.3Dudu + 3.4Eu^2du \text{ ec.}}$ quæ fiat $= \frac{sdu}{a}$, ut
$s = a^2 . \overline{2C + 2.3Du + 3.4Eu^2 \text{ ec.}}$ Quantitates tres x, z, s datæ ſunt omnes per u ope ſerierum. Quapropter t, y datæ invenientur per u, ſi datæ inveniantur per x, z, s: quod ſæpe fieri poſſe, quomodocumque m ſit data per t, y, induſtrius analyſta cognoſcet.

Si m detur per ſolam t, prima ex æquationibus inventis erit finita, ſecunda infiniteſima ordinis primi, tertia ſecundi, atque ita deinceps. Quod tibi conſtabit, ſi quantitates m, n, p, q ec., quæ omnes dantur per t, y ejicias ab æquationibus. Verum ſi m detur aut per ſolam y, aut per y, t, æquatio prima erit in primo ordine differentialium, altera in ſecundo, tertia in tertio, atque ita deinceps.

Ut exemplum aliquod afferamus oſtendens, quo pacto t, y inveniendæ ſint per x, z, s, ſupponamus $m = t$. Quoniam eſt $x = c^{\int ydt}$, & $z = c^{\int ydt}t$, hæc dividatur per primam, & fiet $\frac{z}{x} = t$: Ergo inventa eſt t data per x, z. Ut invenias y, accipe

æqua-

æquationem $x = c^{Sydt}$, tranſi a numeris ad logarithmos $lx = Sydt$, accipe differentiam $\frac{dx}{x} = ydt$: Ergo $y = \frac{dx}{xdt}$; ſed quum ſit $t = \frac{z}{x}$, erit $dt = \frac{xdz - zdx}{x^2}$: Ergo $y = \frac{xdx}{xdz - zdx}$: atqui $dx = \frac{zdu}{a}$, $dz = \frac{sdu}{a}$: Ergo $y = \frac{xz}{xs - z^2}$. Q. E. I.

Si fuerit $m = y$, divide æquationem $z = c^{Sydt} y$ per $x = c^{Sydt}$, & fit $\frac{z}{x} = y$; quare inventa eſt y. Ut inveniatur t accipe, ut ſupra, æquationem $\frac{dx}{x} = ydt$: Ergo $\frac{dx}{yx} = dt$; ſed probatum eſt $xy = z$: Ergo $\frac{dx}{z} = dt$: atqui $dx = \frac{zdu}{a}$: Ergo $\frac{du}{a} = dt$, ſive $\frac{u}{a} = t$. Q. E. I.

Quod dictum de formulis, in quas transformatur æquatio ec $S\frac{dx}{z} S \frac{dx}{z} S\frac{xdx}{z} = z$, opportune applicandum eſt illis, in quas transformatur æquatio ec. $S - \frac{dx}{z} S - \frac{dx}{z} S - \frac{xdx}{z} = z$. Eæ autem, adhibitis ſubſtitutionibus $x = c^{S-ydt}$, $z = c^{S-ydt} m$, invenientur

$1 = \frac{m}{ydt} . \overline{dm - mydt}$, & poſita $n = \frac{m}{ydt} . \overline{dm - mydt}$

$1 = \frac{m}{ydt} . \overline{dn - nydt}$, factaque $p = \frac{m}{ydt} . \overline{dn - nydt}$

$1 = \frac{m}{ydt} . \overline{dp - pydt}$: atque ita deinceps in infinitum. In his enim ſæpe definientur t, y per x, z, s, dummodo in ſeriebus eos coefficientes ponas, qui pro hoc caſu ſunt determinati. Sed adverte, in hoc caſu eſſe $dx = \frac{-zdu}{a}$, & fortaſſe utilius eſſet ponere $dz = \frac{-sdu}{a}$.

Claudam hanc epiſtolam exponens, quomodo ex tradita doctrina colligatur valor tangentis tam hyperbolicæ, quam circularis datus per u æquantem duplum ſectorem diviſum per ſemiaxem; hæc autem quantitas u in circulo eadem eſt ac arcus circularis. Quæ res quamquam notiſſima eſt, tamen juvat ex poſitis princi-

piis

piis deducere. Primæ ex æquationibus inventis ad hanc adhibito ſigno ambiguo reducuntur

$1 = \frac{m}{y\,dt} . \overline{dm \pm my\,dt}$. Ponatur $m = y$, & fiet $1 = \frac{1}{dt} . \overline{dy \pm y^2 dt}$:

Ergo $dt = \frac{dy}{1 \mp y^2}$, ſive ſumendo $a = 1$, $dt = \frac{a^2\,dy}{a^2 \mp y^2}$.

Si y ſit æqualis tangenti AD, notum eſt (*Fig.* 1, 2) t eſſe quantitatem, quæ multiplicata per ſemiaxem CA $= a$, dat duplum ſectorem ACF hyperbolicum, ſi valeat ſignum ſuperius, circularem, ſi valeat inferius. Methodo autem ſupra tradita inveniemus $y = \frac{az}{x}$, & $t = u$. Quare etiam u æquabit duplum ſectorem ACF diviſum per CA.

Itaque, ſi pro x, z ponantur ſeries inventæ, orietur

$$y = a . \frac{\begin{array}{l} + \frac{Au}{a} \pm \frac{Au^3}{2.3.a^3} \quad \text{ec.} \\ \pm aB + \frac{Bu^2}{2a} \pm \frac{Bu^4}{2.3.4.a^4} \end{array}}{\begin{array}{l} A \pm \frac{Au^2}{2a^2} + \frac{Au^4}{2.3.4.a^4} \quad \text{ec.} \\ Bu \pm \frac{Bu^3}{2.3.a^2} + \frac{Bu^5}{2.3.4.5.a^4} \end{array}}$$

in qua æquatione ſi $u = o$, debet etiam $y = o$: atqui, facta $u = o$, invenitur $y = \frac{a^2 B}{A}$: Ergo $B = o$: Igitur

$$y = a . \frac{\frac{Au}{a} \pm \frac{Au^3}{2.3.a^3} + \frac{Au^5}{2.3.4.5.a^5} \pm \text{ec.}}{A \pm \frac{Au^2}{2a^2} + \frac{Au^4}{2.3.4.a^4} \pm \text{ec.}}$$

& facta diviſione per A

$$y = a . \frac{\frac{u}{a} \pm \frac{u^3}{2.3.a^3} + \frac{u^5}{2.3.4.5.a^5} \pm \text{ec.}}{1 \pm \frac{u^2}{2a^2} + \frac{u^4}{2.3.4.a^4} \pm \text{ec.}}$$

Q Hæc

Hæc formula ex elementis facile deducitur per ſinus, & coſinus: nam coſinus eſt ad ſinum ut ſemiaxis ad tangentem. Si autem expreſſiones ſinus, & coſinus adhibeantur, quæ in ſecunda epiſtola inventæ ſunt, eadem formula exurget, quod methodi noſtræ veritatem oſtendit.

Quam utilitatem hæc inventa habere poſſint, tibi vir clariſſime, judicandum relinquo. Interea bonas facultates, ut ſoles, amplifica, ita tamen ut cures valitudinem tuam.

Patavium ad Doc. Joſephum Suzzium
Bononiæ 5 kal. Decem. 1752.

Fig. 1.

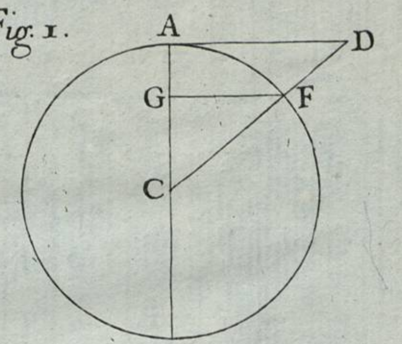
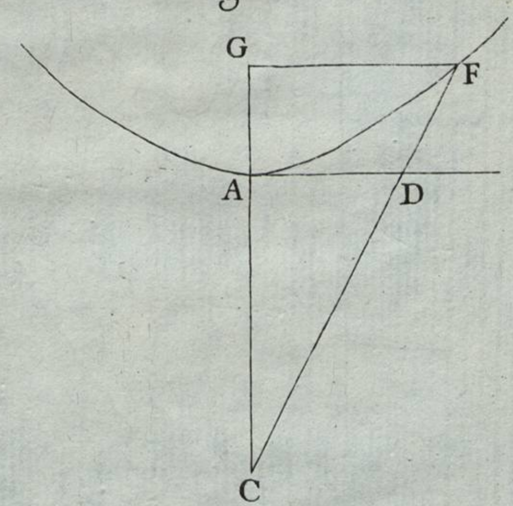


Fig. 2.



OPUSCULUM SEPTIMUM.

EPISTOLA

Exhibens ſolutionem Problematis Kepleriani ſecandi ſemicirculum in data ratione per lineam ductam ex quocumque puncto diametri.

VINCENTIUS RICCATUS

VIRO NOBILI

JORDANO COM. RICCATO

FRATRI CARISSIMO

S. P. D.

Aliquot abhinc menſes, quum ſimul eſſemus, & de rebus geometricis, ac phyſicis loqueremur, ſi recte memoria tenes, ſermo incidit de problemate Kepleriano, ſecandi ſcilicet ſemicirculum ex quocumque diametri puncto in data ratione. Dicebam, præter plures ſolutiones arithmeticas rei aſtronomicæ accommodatas, duas a me lectas fuiſſe ſolutiones geometricas, quarum altera utitur cycloide protracta, altera quadratrice tſchirnhauſiana. Primam invenies in Vallïſio, atque Newtono, alteram in opuſculo Hermanni, quod editum eſt *in Ac. Petrop.* T. 1. Mirabaris, neminem in hujuſce problematis ſolutione uſum fuiſſe aut vulgari cycloide, aut curva ſinuum, quæ duæ curvæ inter circuli quadratrices maxime tuta ac ſimplici ratione delineantur. Quum autem ſignificaſſem, a me olim per cycloidem problema hoc ſolutum fuiſſe, petiiſti, ut quum Bononiam veniſſem, tecum meam ſolutionem communicarem.

Tandem abſolutis aliquot ſtudiis, quibus, ut noſti, diſtentus ſum, adverſaria mea evolvens, cupitam ſolutionem inveni, quam dum attentius legebam, cepi conſiderare, utrum aliam invenire poſſem per curvam ſinuum. Inveni nullo negotio, atque ita ſimpli-

plicem, ac elegantem, ut nulli ex iis, quæ extant, mihi concedere videatur. Utramque vero accipe.

Datum ſemicirculum ADB (*Fig.* 1) per lineam diſcedentem ex quolibet diametri puncto S, nimirum SO dividere in data ratione.

Deſcripta ſit cyclois BFQ, cujus circulus genitor ſit BDA. Primum ejus baſim AQ divide in E in ratione data: tum erecta EG æquali, & parallela AB deſcribatur ſemicirculus GFE ſecans cycloidem in F, & agatur FD parallela AQ. Conſtat BD : DA ſeu GF : FE eſſe in ratione data AE : EQ. Ex H ducatur radius HK parallelus AQ, & abſcindatur KI = CS. Semiaxibus GH, HI deſcribatur Ellypſis GIE, cujus ordinatæ erunt ad ordinatas circuli ſicut HI : HK. Ellypſis autem ſecet cycloidem in L, ex quo puncto ducatur LO parallela AQ, & agatur SO: ajo ab hac ſemicirculum dividi in data ratione.

Demonſtratio. Producatur LO in M, & P, & ſignetur punctum N, in quo GE ab hac linea ſecatur, & ducantur CO, CD. Quoniam FD ſeu OM = arcum BD, LO = BO, facta ſubductione erit LM = OD: ſed ex Ellypſis proprietate MN : LM :: HK : KI, ſive ſubſtitutis æqualibus PO : OD :: CO : CS: Ergo PO . CS = CO . OD: Ergo triangulum COS = ſectori COD: addito igitur ſectore BCO fiet ſpatium BSO = ſectori BCD: Ergo BSO ad ſemicirculum ut ſector BCD ad ſemicirculum, ut BD ad BDA, ut AE : AQ: Ergo dividendo BSO : SOA :: AE : EQ hoc eſt in ratione data. Q. E. D.

Poſtquam ſolutionem expoſui, quæ perficitur ope vulgaris cycloidis, eam producam, quæ utitur curva ſinuum. Sit ſemicirculus BKA (*Fig.* 2) dividendus in data ratione per lineam SO. Intelligatur deſcripta curva ſinuum EKQ, in cujus medio elegantiæ cauſſa ſitus concipiatur circulus BKA. Dividatur baſis EQ in puncto H in data ratione. Jungatur KS, cui ex puncto H agatur parallela HL ſecans curvam ſinuum in puncto L. Ex L ducatur LO parallela baſi, & jungatur SO: ajo, ab hac in data ratione ſemicirculum eſſe diviſum.

Demonſtratio. Ex punctis L, H duc ordinatas LM, HF; ex F age FD parallelam baſi, & duc radios OC, DC. Ex ſimilitudine triangulorum LHM, KSC erit KC : CS :: LM : MH: ſed quum ex curvæ ſinuum natura EH = BD, EM = BO erit MH = DO: Ergo KC, ſeu CD : CS :: LM : DO: Igitur CD. DO = LM . CS, ſive ſector COD = triangulo COS: ergo addito ſectore COB fiet BOS = BDC; ſed CBD : CDKA : ut

arcus

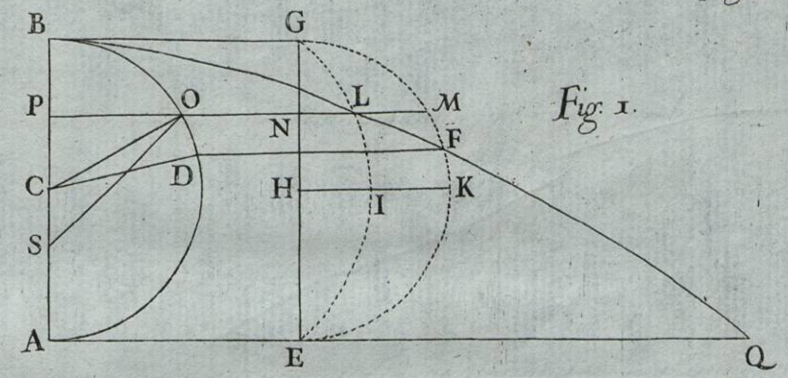


Fig. 1.

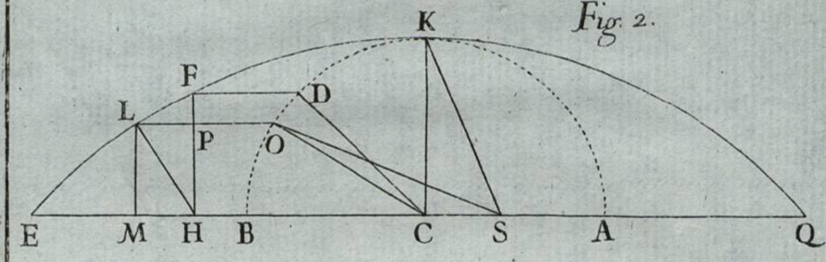


Fig. 2.

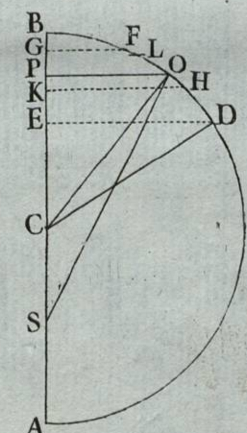


Fig. 3.

arcus BD : DKA :: EH : HQ : ergo BSO : SOKAO :: EH : HQ, hoc eſt in ratione data. Q. E. D.

Methodus a nobis uſurpata, quæ innititur in æqualitate inter ſectorem OCD (*Fig.* 3), & triangulum OCS exhibet modum appropinquandi ad verum valorem arcus BO. Namque ea æqualitas ſuppetit hanc analogiam CO : OP :: CS : DO. Quum autem OP ſit tam incognita quam arcus BO: eſt enim ejus ſinus, loco ejus ponamus ED, qui eſt ſinus arcus dati BD, & obtinebimus pro quarta proportionali arcum DF majorem juſto DO. Vocetur itaque radius $= r$, CS $= b$, arcus BD $= a$, ejus ſinus DE $= Sa$: per notam S enim ſinum intellectum volo. Quare ſit $r : Sa :: b : DF = \frac{bSa}{r}$ majorem juſto DO. Subducatur DF ab arcu BD, & fiet BF $= a - \frac{bSa}{r}$ minor juſto BO.

Fiat iterum $r : S\,\overline{a - \frac{bSa}{r}} :: b : DH = \frac{b}{r}.S\,\overline{a - \frac{bSa}{r}}$ minorem juſto DO: arcus autem BH invenitur $= a - \frac{b}{r}.S\,\overline{a - \frac{b}{r}Sa}$, qui eſt major juſto BO.

Iterum inſtitue analogiam

$$r : S\,\overline{a - \frac{b}{r}.S\,\overline{a - \frac{b}{r}Sa}} :: b : DL = \frac{b}{r}.S\,\overline{a - \frac{b}{r}.S\,\overline{a - \frac{b}{r}Sa}}$$

majorem juſto DO: Ergo fiet cognitus arcus BL minor juſto, qui tamen ad verum valorem BO magis propinquus erit. Quæ methodus ſi producatur ad verum valorem arcus BO ultra quoſcumque limites accedet. Quando autem datis arcubus ſinus inveniuntur, methodus nullam habere poteſt difficultatem.

Puncto D a puncto B recidente, accidet ſæpe, ut in prima operatione inveniatur DF minor juſto, in altera DH juſto major: atque ita deinceps.

Verum quum valores duos ſatis propinquos vero valori arcus BO nactus fueris, utile erit, vocare in auxilium methodum duplicis falſæ poſitionis, per quam erroribus correctis tam propinquum valorem erues, ut exactiorem res aſtronomica deſiderare non poſſit. De hiſce ſolutionibus ſententiam tuam expecto. Vale.

Dat. Bononiæ tertio Kal. Februarii anni 1751.
Tarviſium ad Co: Jordanum Riccatum.

OPU-

OPUSCULUM OCTAVUM.

EPISTOLA

Phyſico-mathematica, in qua oſtenditur, in quacunque actionis hypotheſi, ſpatia peracta a gravi ſucceſſivis temporibus æqualibus eſſe, ut numeri impares.

VINCENTIUS RICCATUS

VIRO NOBILI

POMPEJO DE PELLEGRINIS

S. P. D.

SI tempus, quo mobile actum a gravitate conſtante motu accelerato deſcendit, diviſum intelligatur in numerum infinitum minimorum æqualium tempuſculorum, & ſi recipiatur hypotheſis, quod initio horum tempuſculorum accipiat corpus ab impulſu gravitatis novum gradum velocitatis, certiſſimum eſt, Pompei clariſſime, ſpatia ſucceſſivis hiſce tempuſculis confecta ſervare proportionem numerorum naturalium, qui in tabula a ſerie A exprimuntur. Si vero tempus idem dividatur in partes finitas æquales, certum item eſt, ſpatia ſucceſſivis hiſce æqualibus temporibus peracta eſſe in progreſſione numerorum imparium. Quamquam geometrica, quam afferebam, demonſtratio a te ferme invito aſſenſum extorquebat: tamen in hoc tranſitu ab una ad aliam progreſſionem aliquid obſcuri latere adhuc, judicabas.

Dum hac de re nudius tertius loquebamur, illud ſemel atque iterum reſpondi, nullo modo in dubium revocandam eſſe demonſtrationem geometricam; animadvertendum eſſe, ſi termini ſeriei A bini, aut terni ſumantur, exurgere ſeries B, C a ſerie numerorum naturalium admodum diverſas; quare non eſſe mirandum, prodire ſeriem numerorum imparium, ſi ſeriei A termini accipiantur infiniteni. Cur hoc dicerem, nihil habebam aliud præter ratiocinium geometricum, quod tibi explicaveram. Nunc autem planam demon-

demonſtrationem ad te mitto, quam ex ipſa ſerierum natura meditando deduxi.

Sit ſeries A numerorum naturalium, in qua quilibet terminus a ſequente unitate ſuperatur. Hujuſce ſeriei accipio terminos binos, eoſque in ſummam colligo, ut oriatur ſeries B; quæ eſt ſeries arithmetica, habens 4 pro differentia inter terminos proximos. Si accipiantur in eadem ſerie A termini primum terni, tum quaterni, poſt quini atque ita deinceps, prodibunt ſeries C, D, E, F ec., quæ ſunt omnes ſeries arithmeticæ, & earum differentias exprimunt numeri 9, 16, 25 ec. Series differentiarum, quam verticalem conſtitui, eadem eſt cum ſerie quadratorum numerorum naturalium.

Fac reducas ſeries omnes B, C, D ec. ad eam formam, ut primus earum terminus exprimatur per unitatem: quod obtinebis, ſi dividas ſeriem B per 3, ſeriem C per 6, ſeriem D per 10, atque ita deinceps. Hoc pacto novæ efformabuntur ſeries, in quibus ſecundus terminus erit 2 addita fractione, quæ continetur in ſerie H, cujus primus terminus pertinet ad ſeriem prodeuntem ex B, ſecundus ad eam, quæ naſcitur ex C, atque ita de aliis. Quare per ſeriem H hujuſmodi ſeries facile efformabuntur. Etenim quum omnium primus terminus ſit $= 1$, differentia per quam hic a ſecundo, & omnes antecedentes a conſequentibus ſuperantur erit $1 + \frac{2}{3}$ in prima, $1 + \frac{3}{6}$ in altera, atque ita deinceps. Quare ſi termini ſumerentur infiniteni, hujuſmodi differentia erit $1 +$ terminus ſeriei H, qui in infinita ſede collocatur.

Ut hujuſmodi terminus reperiatur, oportet ſeriei H naturam inveſtigare. Ex ſerie A ſummando terminos omnes antecedentes formetur, ut moris eſt, ſeries K. Quiſque videt ſeriem H naſci ex K, ſi quilibet ejus terminus per ſequentem dividatur. Sed ſi terminorum numerus vocetur $= n$; terminus generalis ſeriei K, ut a plurimis demonſtratur, eſt $= \frac{n \cdot \overline{n+1}}{2}$: Ergo terminus ſubſequens erit $= \frac{\overline{n+1} \cdot \overline{n+2}}{2}$: Igitur ſeriei H terminus generalis $= \frac{\frac{1}{2} \cdot n \cdot \overline{n+1}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{n+1} \cdot \overline{n+2}} = \frac{n}{n+2}$. Itaque ſi numerum n ponas infinitum, habebis terminum ſeriei H in infinita ſede collocatum: atqui in hac hypotheſi 2 eſt incomparabilis cum n infinito: Ergo terminus

minus poſitus in ſede infinita $= \frac{n}{n} = 1$. Quapropter differentia ejus ſeriei, quæ oritur acceptis ſeriei A terminis infinitenis, redactoque primo termino ad unitatem, prodit $= 1 + 1 = 2$. Si hac differentia formetur ſeries I, orietur ſeries numerorum imparium. Q. E. D.

Potuiſſem fortaſſe facilius determinare terminum generalem ſeriei H, ſi eandem convertiſſem in ſeriem L. Hujus enim terminum generalem primo intuitu apparet eſſe $= \frac{n}{n+2}$. Sed malui eundem deducere ex ſerie K, quæ nihil aliud continet, quam primos terminos ſerierum A, B, C, D ec. Spero fore, ut ab hac demonſtratione mens tua obſcuritate omni liberetur. Velim tibi perſuadeas, me nihil omiſſurum, quod tibi, tuiſque ſtudiis eſſe poſſit utilitati. Fac valeas.

Ex Col. S. Luciæ pridie idus Novembris 1749.

OPU-

Differentiæ	*Series*																			
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	A
4	3	7	11	15	19	23	27	31	35											B
9	6	15	24	33	42	51														C
16	10	26	42	58																D
25	15	40	65																	E
36	21	57																		F
49	28	77																		G
	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{10}{15}$	$\frac{15}{21}$	$\frac{21}{28}$														H
	1	3	6	10	15	21	28													K
	1	3	5	7	9	11	13	15	17											I
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{8}$														L

OPUSCULUM NONUM.

Epiſtolæ duæ agentes de æquationibus cubicis reſolutionem admittentibus.

EPISTOLA PRIMA

VINCENTIUS RICCATUS

JACOBO MARISCOTTO

In Bononienſi Scientiarum Inſtituto Geographiæ, & Nauticæ P.

S. P. D.

IN monumentis Academiæ Regiæ Pariſienſis pertinentibus ad annos 1741, & 42, quæ non ita pridem ad me pervenerunt, in lucem emiſſa eſt diſquiſitio analytica Nicolæ viri doctiſſimi, in qua agens de æquationibus gradus tertii demonſtrat, radices tres æquationis $x^3 - px + \frac{p}{3}\sqrt{\frac{2p}{3}} = o$ ita exprimi poſſe, ut nulla appareat quantitas imaginaria, imo unam ex radicibus, per quam reliquæ duæ inveniuntur, eſſe $x - \sqrt{\frac{2p}{3}} = o$. Methodus, qua vir clariſſimus utitur, ingenioſa eſt vel maxime. Namque primum Cardani formulam, quæ includit imaginaria, ob oculos ſibi proponit; tum duas radices tertias, ex quibus eadem formula coaleſcit, convertit in ſeries duas infinitas; poſt ſeriebus ſimul additis quantitates omnes imaginarias eliminat; demum novæ ſeriei naturam conſiderans ejus ſummam expreſſione algebraica determinat, quæ caret imaginariis.

Theorema hoc aliquot ante annos detexeram methodo diverſiſſima, quæ quanquam ſubtilitate Nicolæ methodo concedit, tamen videtur elegantia, ac ſimplicitate præſtare. Methodum meam ad te, Jacobe ornatiſſime, ſcribere decrevi, ut videas, quo pacto longe diverſis viis ad eandem veritatem veniamus. Hanc ob rem hæc duo Lemmata præmitto.

Lemma primum. Radix tertia quantitatis $2m - 2m\sqrt{-1}$ eſt $-\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{m}\,.\,\sqrt{-1}$.

Demonſtratio. Elevetur ad poteſtatem cubicam quantitas $-\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{m}\,.\,\sqrt{-1}$, & invenietur $-m - 3m\sqrt{-1} + 3m - m\sqrt{-1} = 2m - 2m\sqrt{-1}$. Igitur $\sqrt[3]{2m - 2m\sqrt{-1}} = -\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{m}\,.\,\sqrt{-1}$. Q. E. D.

Lemma ſecundum. Radix tertia quantitatis $2m + 2m\sqrt{-1}$ eſt $-\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{m}\,.\,\sqrt{-1}$.

Demonſtratio eadem methodo perficietur.

Hiſce ſuppoſitis conſidero æquationem œcumenicam gradus terti nempe $x^3 - px + q = 0$, cujus radicem unam invenit Scipio Ferreus, ut ſcripſit Cardanus, ideſt $x + \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}}$. Ut utraque radix tertia contineatur in canone duorum lemmatum, quæ præmiſſa ſunt, oportet, ut $\frac{q}{2} = 2m$, & $\sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}} = 2m\sqrt{-1}$: Ergo $\frac{q}{2} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}$, ſive $\frac{qq}{4} = -\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}$, ſive $qq = \frac{2p^3}{27}$, demum extracta radice $q = \frac{p}{3}\sqrt{\frac{2p}{3}}$. Qui valor ſi ſubſtituatur in æquatione gradus tertii, fiet $x^3 - px + \frac{p}{3}\sqrt{\frac{2p}{3}} = 0$, cujus radix ex formula Cardani erit

$$x + \sqrt[3]{\frac{p}{2.3}\sqrt{\frac{2p}{3}} + \frac{p}{2.3}\sqrt{\frac{2p}{3}}\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{\frac{p}{2.3}\sqrt{\frac{2p}{3}} - \frac{p}{2.3}\sqrt{\frac{2p}{3}}\sqrt{-1}} = 0.$$

Ad extrahendam utramque ex radicibus cubicis, ſatis erit in lemmatum formulis ponere pro m ejus valorem $\frac{p}{4.3}\sqrt{\frac{2p}{3}}$:

Orie-

Orietur autem

$$x - \sqrt[3]{\frac{p}{4.3}\sqrt{\frac{2p}{3}}} - \sqrt[3]{\frac{p}{4.3}\sqrt{\frac{2p}{3}}\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{\frac{p}{4.3}\sqrt{\frac{2p}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{p}{4.3}\sqrt{\frac{2p}{3}}\sqrt{-1}} =$$

$x - 2\sqrt[3]{\frac{p}{4.3}\sqrt{\frac{2p}{3}}} = x - \sqrt[3]{\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{2p}{3}}} = x - \sqrt{\frac{2p}{3}} = o$. Quæ formula ea ipſa eſt, quam per aliam methodum Nicolas invenit.

Duas reliquas radices æquationis noſtræ facto calculo nanciſceris $x + \sqrt{\frac{p}{2.3}} \mp \sqrt{\frac{p}{2}} = o$.

Quæres ex me fortaſſe, vir clariſſime, utrum mea methodus par ſit aliis æquationibus reſolvendis. Alias infinitas formulas, non diſſimiles ab ea, quam Nicolas propoſuit, ajo ſimiliter reſolvi: tametſi ſperandum non ſit, rem poſſe in omnibus confici. Ad hunc finem, quemadmodum antea feci, lemmata præmitto duo.

Lemma primum. Radix tertia quantitatis $m.\overline{3n^2 - 1} - m\sqrt{-1}.\overline{3n - n^3}$ eſt æqualis $-\sqrt[3]{m} - n\sqrt[3]{m}\sqrt{-1}$.

Lemma alterum. Radix cubica quantitatis $m.\overline{3n^2 - 1} + m\sqrt{-1}.\overline{3n - n^3}$ æquat $-\sqrt[3]{m} + n\sqrt[3]{m}\sqrt{-1}$.

Si eleves radices ad cubicam poteſtatem, utrumque lemma clariſſime demonſtrabis.

Ut radix æquationis œcumenicæ, quam exhibuit Cardanus, in præmiſſis formulis contineatur, neceſſe eſt, valere hujuſmodi æqualitates $\frac{q}{2} = m.\overline{3n^2 - 1}$, $\sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}} = m\sqrt{-1}.\overline{3n - n^3}$, ex quibus orientur $\sqrt{m^2.\overline{3n^2 - 1}^2 - \frac{p^3}{27}} = m\sqrt{-1}.\overline{3n - n^3}$, ſive

$$m^2.\overline{\begin{array}{l} 9n^4 - 6n^2 + 1 + n^6 \\ - 6n^4 + 9n^2 \end{array}} = \frac{p^3}{27}, \text{ ſive}$$

$m^2.\overline{1 + 3n^2 + 3n^4 + n^6} = m^2.\overline{1 + n^2}^3 = \frac{p^3}{27}$: Igitur

 $\frac{q}{2} =$

$\frac{q}{2} = \frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} \,.\, \frac{3n^2 - 1}{\overline{1+n^2} \,.\, \sqrt{1+n^2}}$: qui valor ſi ſubſtituatur in formula tertii gradus, exhibebit

$$x^3 - px + \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} \,.\, \frac{3n^2 - 1}{\overline{1+n^2} \cdot \sqrt{1+n^2}} = 0.$$

Hujuſce æquationis radix ex Cardani methodo erit

$$x + \sqrt[3]{\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} \,.\, \frac{3n^2 - 1}{\overline{1+n^2} \cdot \sqrt{1+n^2}} + \frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt{-1} \,.\, \frac{3n - n^3}{\overline{1+n^2}\sqrt{1+n^2}}}$$

$$+ \sqrt{\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} \,.\, \frac{3n^2 - 1}{\overline{1+n^2} \cdot \sqrt{1+n^2}} - \frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt{-1} \,.\, \frac{3n - n^3}{\overline{1+n^2} \,.\, \sqrt{1+n^2}}}$$

$= 0$. Si hæ formulæ cum lemmatum formulis comparentur, invenientur eſſe $m = \frac{p}{3 \cdot \overline{1+n^2}}\sqrt{\frac{p}{3 \cdot \overline{1+n^2}}}$. Quapropter extractis radicibus erit

$$x - \sqrt{\frac{p}{3 \cdot \overline{1+n^2}}} - n\sqrt{\frac{p}{3 \cdot \overline{1+n^2}}}\sqrt{-1} - \sqrt{\frac{p}{3 \cdot \overline{1+n^2}}} + n\sqrt{\frac{p}{3 \cdot \overline{1+n^2}}}\sqrt{-1}$$

$= 0$, ſive $x - 2\sqrt{\frac{p}{3 \cdot \overline{1+n^2}}} = 0$. Q. E. I.

Reliquæ duæ radices æquationis, facto notiſſimo calculo, invenientur eſſe

$$x + \sqrt{\frac{p}{3 \cdot \overline{1+n^2}}} \mp n\sqrt{\frac{p}{1+n^2}} = 0.$$

Si numero n diverſos valores tribuas vel rationales, vel irrationales, infinitæ formulæ orientur, quarum radices tres ita inveniuntur, ut imaginaria locum non habeant. Advertendum tamen eſt primo, radices tres æquationis reſolutæ eſſe ſæpenumero incomenſurabiles; ſed earum incomenſurabilitas in primo tantum ordine

dine conſiſtit; implicant enim dumtaxat radices ſecundas, nunquam autem tertias. Fac advertas deinde, in prima radice inventa adeſſe quantitatem radicalem, ſi adſit in æquatione, ſecus autem, ſi non adſit. Quare ſi æquatio radicalium expers ſit, per hanc methodum inveniemus ſemper radicem unam commenſurabilem.

Hæc, quæ plures ante annos mecum ipſe meditatus fueram, doctiſſimi Nicolæ diſquiſitio ad memoriam revocavit. Tuum eſt, Vir clariſſime, quanti facienda ſint, judicare. Vale.

Ex Coll. S. Luciæ tertio Idus Julii 1750.

EPI-

EPISTOLA SECUNDA

VINCENTIUS RICCATUS

JACOBO MARISCOTTO

In Bononienſi Scientiarum Inſtituto Geographiæ, & Nauticæ P.

S. P. D.

QUæſiſti ex me, Vir doctiſſime, mihique amiciſſime, utrum methodus illa, qua tres radices plurium æquationum cubicarum ſuperioribus litteris ab imaginariis liberavi, ullam utilitatem habere poſſit in æquationibus illis, quibus unica tantum eſt radix realis, reliquæ duæ imaginariæ. Nullus dubito, quin ſi eam methodum recte adhibeas, formam elegantiorem in multis æquationibus radici reali concilies. Hanc ob rem, ut antea fecimus, lemmata præmitto duo.

Lemma primum. Quantitatis $m \cdot \overline{3n^2 + 1} + m \cdot \overline{3n + n^3}$ radix cubica eſt $\sqrt[3]{m} + n\sqrt[3]{m}$.

Lemma alterum. Quantitatis $m \cdot \overline{3n^2 + 1} - m \cdot \overline{3n + n^3}$ radix tertia eſt $\sqrt[3]{m} - n\sqrt[3]{m}$. Utrumque lemma & notum eſt, & facillime demonſtratur.

Ut radices, quas formula Cardani ſuppeditat, & quas in prima epiſtola deſcripſi, in lemmatum formulis contineantur, neceſſe eſt, ut $\frac{q}{2} = m \cdot \overline{3n^2 + 1}$, & $\sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}} = m \cdot \overline{3n + n^3}$. Ex quibus æquationibus invenies $m = \frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \frac{1}{\overline{1 - n^2}\sqrt{1 - n^2}}$, & $\frac{q}{2} = \frac{p}{q}\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \frac{3n^2 + 1}{\overline{1 - n^2}\sqrt{1 - n^2}}$: qui valor ſi ponatur in æquatione œcumenica tertii gradus, ſufficiet

$$x^3 - px + \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \frac{3n^2+1}{1-n^2\sqrt{1-n^2}} = o.$$

Hujus æquationis radix Cardani modo expreſſa erit

$$x + \sqrt[3]{\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \frac{3n^2+1}{1-n^2\sqrt{1-n^2}} + \frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \frac{3n+n^3}{1-n^2\sqrt{1-n^2}}}$$

$$+ \sqrt{\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \frac{3n^2+1}{1-n^2\sqrt{1-n^2}} - \frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \frac{3n+n^3}{1-n^2 \cdot \sqrt{1-n^2}}} = o.$$

Si formularum fiat comparatio, conſtabit m

$= \frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \frac{1}{1-n^2\sqrt{1-n^2}}$. Quare extractis radicibus fiet

$$x + \sqrt{\frac{p}{3 \cdot 1-n^2}} + n\sqrt{\frac{p}{3 \cdot 1-n^2}} + \sqrt{\frac{p}{3 \cdot 1-n^2}} - n\sqrt{\frac{p}{3 \cdot 1-n^2}}$$

$= o$, ſive $x + 2\sqrt{\frac{p}{3 \cdot 1-n^2}} = o.$

Diviſa autem æquatione tertii gradus exurget æquatio hæc ſecundi gradus $x^2 - 2x\sqrt{\frac{p}{3 \cdot 1-n^2}} + \frac{3n^2+1}{3 \cdot 1-n^2} p = o$, quæ ſi reſolvatur, exhibebit duas radices imaginarias. Hæc autem omnia dicta volo pro hypotheſi, quod n minor ſit unitate, vel ſi major ſit unitate, quod p ſit negativa. Si enim n ſuperaret unitatem, & p foret poſitiva, æquatio ipſa tertii gradus inplicaret imaginaria.

Ut tibi, tuiſque petitionibus, Jacobe ornatiſſime, facerem ſatis, hæc addenda eſſe judicavi, quæ in ſuperioribus litteris ea de cauſa omiſeram, quia nimis obvia videbantur, & ex formulis Cardani facile deducenda. Fac valeas.

Ex Col. S. Luciæ octavo Kal. Sextilis 1750.

OPU-

OPUSCULUM DECIMUM.

Epiſtola oſtendens veram Baliani ſententiam de theoria gravium decidentium.

VINCENTIUS RICCATUS

D. SALVATORI CORTICELLIO

Clericorum Regularium S. Paulli Præpoſito Provinciali (a)

S. P. D.

PRobavimus identidem, ſi recte memoria tenes, Vir præſtantiſſime, ſententiam Cremutii Cordi dicentis, a poſteritate quemlibet laudem accipere, quam promeruit. Quæ ſententia tametſi vera ſit plerumque, tamen aliquando contingere poteſt, ut auctor nobilis, qui & ingenioſe ſcripſit, & vere, non ſolum jaceat in oblivione, ſed etiam abſurdæ opinionis auctor paſſim habeatur. In hoc calamitatis genus incurrit Joannes Baptiſta Balianus Patritius Genuenſis acutiſſimus mathematicus, qui ſimul cum Galileo ſeculo decimo ſeptimo in Italia floruit. Gratum me tibi facturum ſpero, ſi ex operibus ejuſdem Baliani, quæ nuper venerunt in manus meas, tanti viri defenſionem ſuſcipiam: ea enim natura es, ut ſuam cuique laudem tribui, maximopere gaudeas.

Opinati ſunt nonnulli, corpus actum a gravitate, quæ conſtans ſupponitur, deſcendens per æqualia ſpatiola accipere æqualem gradum velocitatis, ita ut velocitates acquiſitæ ubique ſpatiis confectis proportione reſpondeant. Opinio hæc ſollicitum aliquando, & anxium tenuit Vincentium Vivianum (b), qui ut omni dubitatione liberaretur, eandem Galileo Magiſtro ſuo examinandam pro-

(a) *Has litteras primum edidit anno 1752 Salvator Corticellius homo etruſci ſermonis peritiſſimus in ſuo pereleganti opere, quod inſcribitur* De Etruſca Eloquentia Sermones centum: *Deinde iterum typis mandavit anno 1754 Auctor Hiſtoriæ litterariæ Italiæ* Tomo *6 paucis omiſſis, quæ minus neceſſaria viſa ſunt. Nunc autem tertio eaſdem produco ex italico in latinum ſermonem translatas.*

(b) *In hac editione corrigo errorem, quem admiſi in ſuperioribus. Conſtat enim ex vita Galilei compoſita a Vincentio Viviano, non ab Evangeliſta Torricellio, quemadmodum antea ſcripſeram, ſed ab eodem Viviano excitatam fuiſſe hanc dubitationem.*

propoſuit. Galileus autem poſtquam eam diligentius conſideraſſet, falſam eſſe, atque in abſurdum deſinere demonſtravit; atque demonſtrationem ſuis dialogis addidit, ut quiſque videre poteſt in omnibus editionibus, quæ primam ſubſequutæ ſunt. Nihilo tamen ſecius eandem opinionem amplexus, ac tutatus eſt P. Cazreus in litteris Gaſendo datis: qui contra ejus rationibus reſpondit, & Galilei ſententiam propugnavit. Controverſiam hanc diremit Petrus Fermatius Toloſanus Senator, & Geometra maximus, qui in epiſtola, quam ad Gaſendum ſcripſit, per veterum methodum geometrice demonſtravit, corpus deſcendens in hypotheſi Cazrii ad percurrendum quodlibet ſpatium finitum tempore indigere infinito: quod abſurdum re vera nihil differt ab eo, quod protulit Galileus, atque probavit, tametſi Fermatius uſus fuerit clariore, atque exactiore demonſtratione.

Hanc opinionem ſtatuentem, velocitates tenere ſpatiorum proportionem, Baliano tribuit Chriſtianus Wolfius vir celebris in editione curſus mathematici, quæ edita eſt Halæ Magdeburgicæ anno 1713. In ultimo enim opuſculo, in quo de ſcriptis mathematicis verba facit, pronunciat Galilei inventa de corporum gravium deſcenſu mutata fuiſſe a Joanne Baptiſta Baliano.

Suſpicor, doctiſſimum Wolfium primum fuiſſe, qui damnatæ ſententiæ auctorem fecerit Balianum. Etenim invenio Blondellum in libro, qui inſcribitur, *Bombarum projiciendarum ars*, hæc de Baliano ſcribere: *Non eſt omittendum, Balianum Genuenſis Reipublicæ Senatorem in libro de motu, qui eodem tempore prodiit, quo dialogi Galilei, uti pendulorum experimento ad demonſtrandum id, quod ex ſua definitione colligit Galileus, nempe ſpatia confecta a mobile deſcendente eſſe inter ſe in ratione duplicata temporum, quæ in illis percurrendis impendit.* Hoc ſedulo animadverſum fuit in actis Lipſienſibus, ubi Blondelli opus recenſetur. Hiſce adde P. Milliet de Chales, qui eandem eſſe ſententiam Galilei, ac Baliani profitetur. Quare qui falſam opinionem Baliano tribuerit, ante Wolfium inveni neminem. Dicendum eſt omnino, oſcitanter Baliani libros legiſſe Wolfium, quia affirmat, de liquidis verba fieri lib. 3, 4, 5, quum lib. 4, 5, 6 agatur de liquidis. Mirandum porro eſt, quomodo Wolfius errori huic tam firmiter adhæſerit, ut in ſequentibus editionibus veluti in Genevenſi anni 1733, quotieſcunque meminit opinionis ſtatuentis velocitatem ſpatio proportionalem, hypotheſim Baliani, ſeu Balianam appellet. Quoniam autem opera Wolfii omnium manibus verſantur, factum eſt, ut ab eo in omnes mathematicos error hujuſmodi pertranſierit.

Verum qui veritatem aſſequi cupit, Baliani librum evolvat. In tertia propoſitione hoc demonſtratum leget, *lineas deſcenſus gravium, dum motu perpendiculari feruntur, eſſe in duplicata ratione diuturnitatum*, quas nos uſitato vocabulo tempora nominamus. Similiter in ſexta propoſitione hoc ſibi proponit demonſtrandum, *gravia naturali motu deſcendere ſemper velocius ea ratione, ut temporibus æqualibus deſcendant per ſpatia ſemper majora juxta proportionem, quam habent impares numeri ab unitate inter ſe*. Hæc autem, ut neminem fugit, ſunt pura puta theoremata Galilei.

Sub oriri poteſt dubitatio, utrum theoriam, quam docet, a Galileo didicerit Balianus. Editionum tempora ſtatuamus, & dubitatione liberabimur. Dialogi Galilei editi ſunt Lugduni Batavorum anno 1638 curante Comite de Noailles, qui ante duos annos eoſdem ab auctore acceperat; eodemque anno data eſt epiſtola ad eundem Comitem dialogis præfigendam. In hac editione non legitur refutatio hypotheſis velocitatum ſpatiis proportionalium, quæ, ut ſupra monui, addita eſt in poſterioribus editionibus. Balianus, qui ſemper hoc ſtudiorum genere delectatus fuerat, & qui uſque ab anno 1611, dum arcis Savonæ præfectus eſſet, pulcherrimas obſervationes inſtituerat, primum libellum edidit anno eodem 1638, quem vidiſſe Blondellum, dicendum eſt; de eo enim ſcribit eodem tempore prodiiſſe, ac dialogos Galilei. Non ſum neſcius Balianum anno 1646 emiſiſſe in lucem opus in ſex libros diviſum, cujus mentionem facit Wolfius. Liber primus nihil eſt aliud, quam nova editio libelli typis impreſſi anno 1638. Duo qui ſequuntur ſolidorum theoriam proſequuntur; in ultimis tribus de fluidis agitur. Dat operam auctor in libro altero, ut poſtulatum, quod antea ſuppoſuerat, pleniſſime demonſtret; de ejus enim evidentia nonnihil ambigebat. Meminit quidem in prima præfatione mechanices manuſcriptæ Galilei; ſed opus hoc diverſum eſſe a dialogis, certum eſt. Hoc tantum dicere poſſumus, anno 1646, non prorſus ignotos fuiſſe Baliano dialogos Galilei; nam in libri tertii præfatione ſcribit, ſe *non ignorare, viam, quam in ſuo motu projecta deſcribunt, viris oculatiſſimis viſum eſſe parabolicam*: quæ veritas primum a Galileo in dialogis eſt demonſtrata.

Poſtquam tempora hæc ſancita ſunt, veroſimile admodum mihi videtur, cum Galileum, cum Balianum ejuſdem theoriæ gravium deſcendentium auctores extitiſſe, neque alterum ab altero accepiſſe. Qua in ſententia magis, magiſque confirmor, quum methodos, quibus uterque uſus eſt, earumque diverſitatem conſidero. Optimum erit utramque ad examen vocare, ut quiſ-

que

que judicare poſſit de earum pulchritudine, atque elegantia.

Galilei methodus, ſi recte aſſequor, hac ratione progreditur. In ea definitione, in qua nomine motus æquabiliter accelerati illum intelligit, per quem ſingulis æqualibus tempuſculis æquales acquiruntur gradus velocitatis, hypotheſin congruam præmittit, quæ a modo agendi, quo natura utitur, non videtur abhorrere. Hypotheſis hæc nondum vera judicanda eſt, ſed ea de cauſſa tantum proponitur, ut ad examen vocetur, atque experientiæ ſubjiciatur. Quamobrem colligendæ ſunt ab ea quotquot conſectaria neceſſario deſcendunt, tum quæ ad rite inſtituta experimenta traduci poſſunt, traducenda. Si experientia diſcrepet a conſectariis deductis, neceſſarium erit hypotheſim reprobare tanquam falſam, & naturæ legibus diſſentaneam: ſi vero cum conſectariis experientia conveniat, hypotheſis theſis fiet, & a principiis experimentalibus demonſtrationem accipiet. Ad hoc periculum traducta hypotheſis Galilei, veriſſima inventa eſt, & digna, quam univerſa Geometrarum Reſpublica amplectatur.

Quanquam methodus hæc recta eſt, & non raro utilis veritati venandæ: tamen de ejus exitu plurimum ſibi fortuna aſſumit: Etenim fortunæ debemus, quod illam hypotheſim ſeligamus, quæ deinceps ab experimentis comprobetur. Si alia hypotheſis ad examen vocaretur, ſtudia omnia, laboreſque deperderentur. Reapſe ſi Galileus amplexus fuiſſet opinionem ſtatuentem velocitates ſpatiis proportionales, quæ primo aſpectu æque congrua, ac conſentanea videri poteſt, coactus fuiſſet eam reprobare tanquam omnibus recte inſtitutis experimentis adverſantem. Non ſum neſcius, in hujuſmodi difficillimis, ac periculoſis inquiſitionibus opitulari plurimum rectam judicandi rationem, qua, ut omnibus notum eſt, mirifice ornatus erat Galileus.

Tranſeo ad methodum Baliani, cujus ratiocinatio initium ſumit ab experientia, quæ in phyſico-mathematicis inveſtigationibus tanquam unicum, ac univerſale principium habenda eſt. Obſervando collegerat Balianus, duo pendula inæqualia arcus ſimiles deſcribentia dato tempore tot oſcillationes conficere, ut earum numerus ſit ſemper in ratione reciproca ſubduplicata longitudinum: Igitur quum numerus oſcillationum dato tempore peractarum ſit ſemper inverſe ut tempus, quo quælibet oſcillatio perficitur, erunt tempora ſingularum oſcillationum in ratione directa dimidiata longitudinum pendulorum. Poſt hoc conſectarium ad aliud tranſit, quod valde naturæ conſentaneum videtur: nimirum colligit, tempora quoque, quibus duo inæqualia pendula deſcribunt arcus ſimi-

les, & ſimiliter poſitos eſſe inter ſe in ratione longitudinum ſubduplicata. Hiſce ſtatutis conſtituit duo pendula horizontalia, & ſinit ea cadere per duos arcus minimos ſimiles, qui cum tangentibus verticalibus confunduntur: Igitur tempora quibus duo hi arcus minimi deſcribuntur, erunt in ratione dimidiata longitudinum pendulorum, ſive eorundem arcuum: Ergo duo arcus minimi erunt in ratione duplicata temporum, quibus percurruntur: atqui quoniam arcus confunduntur cum tangentibus verticalibus, ſunt ſpatia motu verticali confecta: Ergo ſpatia ſunt in ratione temporum duplicata. Quod princeps eſt theorema, ex quo cetera omnia inveniuntur, ac demonſtrantur.

Laudanda eſt prudentia Galilei, qui hypotheſim ſuam per tuta experimenta comprobavit; ſed Baliani methodus exactior mihi videtur, & felicior. Nam quum initium ducat ab experientia, jubet, ut ita dicam, naturam ea, quæ celat, arcana in apertum proferre. Laus maxima danda eſt Galileo, qui in gravium cadentium theoriam majus augmentum contulit, quam Balianus, qui eo tempore non egerat, niſi de gravibus aut verticaliter, aut per planum inclinatum deſcendentibus; ſed ſua Baliano, qui theoriæ principia invenit, deneganda non eſt, quod certe ſi in præſens viveret Galileus, præſtare non dubitaret.

Tibi autem potiſſimum, vir præſtantiſſime, ad defendendum Baliani jus, hæc ſcribenda cenſui, quia quum plurimi ſemper feceris homines doctos, & de bonis facultatibus meritos, tibi rem gratiſſimam me facturum eſſe judicavi. Fac valeas.

Tertio nonas Julii anni 1751
Ex Col. S. Luciæ.

OPU-

OPUSCULUM UNDECIMUM.

EPISTOLA,

Qua theorema Bernoullianum pertinens ad rectificationem curvarum demonſtratur, & amplificatur.

VINCENTIUS RICCATUS

LEONARDO XIMENES (a)

Soc. Jeſu, Matheſeos Profeſſori

S. P. D.

QUare tibi, Vir Clariſſime, ſcribam de perantiquo theoremate, quod anno 1697 in actis lipſienſibus propoſitum fuit a Joanne Bernoullio Geometra, ut noſti, in primis acuto, in cauſſa eſt Joannes Theophilus Waltius homo doctiſſimus, qui in eiſdem actis anni 1739 illius theorematis analyſim edidit, quæ quantum artificiis abundat, tantum propter longitudinem videtur eſſe moleſta. Etenim mihi Waltii opuſculum legere incipienti cupido ſuborta eſt experiundi, utrum faciliori, atque elegantiori analyſi theorema Bernoullii eruere potuiſſem: quæ cupido magis magiſque adaucta eſt, quum legerim ipſum Bernoullium fateri, ſe non indicare, qua via, quave analyſi illud invenerit; *quia calculus foret nimiæ prolixitatis*. Quidquid autem a me inventum eſt judicio, cenſuræque tuæ libens ſubmitto. Certe methodus, quæ ſe ſe obtulit quaſi non vocata, non ſolum Bernoullii theorema invenit, ſed plura alia patefacit, quæ non mediocri elegantia prædita eſſe mihi videntur.

Theorema ita a ſuo Auctore exponitur. *Si poſitis curvæ coordinatis* x, y *fiat alia curva, cujus coordinatæ ſint* $\frac{x\,dy^3}{dx^3}$, & $\frac{3x\,dy^2}{dx^2} - \frac{1}{2}S\frac{dy^2}{dx}$ *erunt*

(a) *In lucem emiſſa fuit hæc epiſtola ſermone italico anno* 1752 *in tomo decimo Symb. let. collect. ab Antonio Franciſco Gorio viro doctiſſimo.*

erunt ambæ curvæ genitrix, & genita ſimul ſumptæ rectificabiles. Liceat mihi paullo aliter theorema proponere, nimirum: ſi curvæ datæ æquatio ſit $dy = pdx$, in qua p data ſit per x, & conſtantes, & ſi deſcribatur alia curva, cujus coordinatæ ſint xp^3, $\frac{3}{2}xp^2 - \frac{1}{2}Sp^2dx$, curvæ ambæ ſimul ſumptæ rectificationem recipient.

Ut voti compos ſiam, neceſſe eſt, addam elemento curvæ datæ, quod eſt $= dx\sqrt{1+pp}$, ejuſmodi quantitatem differentialem, quæ prædita ſit duabus hiſce conditionibus: prima ut ejus quadratum diviſibile ſit in duo quadrata, quorum radices nullam quantitatem imaginariam involvant: ſecunda, ut datæ curvæ elemento addita præbeat formulam integrabilem. Primæ conditioni faciet ſatis quælibet formula differentialis multiplicata per $\sqrt{M+N}$, in qua radice uterque terminus ſigno $+$ afficiatur. Ut autem longos calculos vitem pro $\sqrt{M+N}$ utar $\sqrt{1+pp}$, quæ ineſt in elemento curvæ datæ. Alteram conditionem ut obtineam, in ſubſidium vocabo methodum quantitatum indeterminatarum.

Itaque pono quæſitæ curvæ elementum eſſe $= \overline{Vdx + Zxdp}\,.\sqrt{1+pp}$, in quo V, Z ſunt quantitates determinandæ per x in analyſeos progreſſu. Igitur ſumma duorum elementorum erit $=$
$dx\,.\sqrt{1+pp} + \overline{Vdx + Zxdp}\,.\sqrt{1+pp} =$
$\overline{1+V}\,.\,dx\sqrt{1+pp} + Zxdp\sqrt{1+pp}$. Ponamus hujus integrale eſſe $= \overline{1+V}\,.\,x\sqrt{1+pp}$, cujus differentia capiatur, & erit $\overline{1+V}\,.\,dx\sqrt{1+pp} + dV\,.\,x\sqrt{1+pp} + \frac{\overline{1+V}\,.\,xpdp}{\sqrt{1+pp}}$.
Conferatur hæc formula cum ſuperiore, ut determinetur Z, & fiet $Zxdp\sqrt{1+pp} = dV\,.\,x\sqrt{1+pp} + \frac{\overline{1+V}\,.\,xpdp}{\sqrt{1+pp}}$. Quoniam V debet deinceps determinari per x, aut per p fiat $dV = qdp$, factaque ſubſtitutione divide per $xdp\sqrt{1+pp}$, & invenies $Z = q + \frac{\overline{1+V}\,.\,p}{1+pp}$. Quapropter ſi in aſſumpto elemento curvæ quæſitæ pro Z inventus valor ſubſtituatur, ipſum additum elemento

to curvæ additæ integrabile erit, factaque integratione proveniet $\overline{1+V}.x\sqrt{1+pp}$.

Inveniendæ ſunt coordinatæ curvæ quæſitæ. Elementi curvæ quæſitæ $\overline{Vdx+Zxdp}.\sqrt{1+pp}$ quadratum in duo hæc quadrata dividatur

$$\overline{Vdx+Zxdp}^2, \qquad p^2.\overline{Vdx+Zxdp}^2.$$

Horum radices, quæ nihil continent imaginarii, dabunt differentias duarum coordinatarum curvæ quæſitæ, nempe

$$Vdx+Zxdp, \qquad p.\overline{Vdx+Zxdp}.$$

In his ponatur valor quantitatis Z inventus, & fient

$$Vdx+qxdp+\frac{\overline{1+V}.xpdp}{1+pp}, \quad p.\overline{Vdx+qxdp+\frac{\overline{1+V}.xpdp}{1+pp}}:$$

atqui $qdp = dV$: Ergo coordinatarum differentiæ ſunt

$$Vdx+xdV+\frac{\overline{1+V}.xpdp}{1+pp}, \quad p.\overline{Vdx+xdV+\frac{\overline{1+V}.xpdp}{1+pp}}.$$

Harum autem integrales dabunt duas quæſitæ curvæ coordinatas. In ſumendis integralibus conſtantes omitti poſſunt, quia harum additio curvas non mutat, neque ſignorum habenda eſt ratio, quia coordinatæ, vel poſitivæ, vel negativæ accipiantur, curvam dant eandem.

Antequam indeterminatam V per x, & per p determino, determinari autem poteſt prout libet, juvat advertere differentias duarum coordinatarum curvæ quæſitæ ita eſſe affectas, ut ſi prima multiplicetur per p alteram exhibeat: quæ conditio reperitur etiam in differentiis coordinatarum curvæ datæ. Quapropter ſi fiat $Vdx+xdV+\frac{\overline{1+V}.xpdp}{1+pp} = dz$, differentiæ coordinatarum curvæ modo inventæ erunt dz, pdz: Ergo ſi deſcribatur curva, in qua differentiæ coordinatarum ſint

$$Wdz+zdW+\frac{\overline{1+W}.zpdp}{1+pp}, \quad p.\overline{Wdz+zdW+\frac{\overline{1+W}.zpdp}{1+pp}},$$

hæc ſimul cum ſuperiore erit integrabilis, & æqualis $\overline{1+W}.z\sqrt{1+pp}$. Conſtat autem z dari per x. Atque hoc deinceps primum theorema vocabimus.

Quan-

Quanquàm quantitas W poteſt determinari ut libet, tamen ut tertia curva proficiſcatur ex ſecunda, quomodo ſecunda ex prima, debet W ita dari per z, ſicuti V per x. Quare ſi V data ſit ſolum per p, erit $V = W$; ſi autem data ſit etiam per x, non erit difficile indeterminatam V ſimiliter determinare per z. Hac autem ratione a tertia curva fit progreſſus ad quartam, a quarta ad quintam, atque ita deinceps. Hæc animadverſio ad conſtruendas curvarum ſeries, in quibus ſingula paria rectificationem admittunt, mirum in modum conducit.

Præterea quemadmodum ex curva, cujus coordinatarum differentiæ ſunt dx, pdx oritur curva habens pro coordinatis integrales quantitatum

$$Vdx + xdV + \frac{\overline{1+V}.xpdp}{1+pp},\ p.\overline{Vdx + xdV + \frac{\overline{1+V}.xpdp}{1+pp}};$$

ita viciſſim ex hac illa orietur, & ſumma duarum curvarum erit $\overline{1+V}.x\sqrt{1+pp}$. Fac igitur $Vdx + xdV + \frac{\overline{1+V}.xpdp}{1+pp} = dz$, & per hanc æquationem determina x. Divide æquationem per xV, & habebis

$\frac{dx}{x} + \frac{dV}{V} + \frac{\overline{1+V}.pdp}{V.\overline{1+pp}} = \frac{dz}{xV}$. Pone

$\frac{\overline{1+V}.pdp}{V.\overline{1+pp}} = \frac{ds}{s}$, & $c^{S\frac{\overline{1+V}.pdp}{V.\overline{1+pp}}} = s$, in qua c eſt numerus, cujus logarithmus æquat unitatem. Facta ſubſtitutione orietur æquatio $\frac{dx}{x} + \frac{dV}{V} + \frac{ds}{s} = \frac{dz}{Vx}$. Fac $\frac{dx}{x} + \frac{dV}{V} + \frac{ds}{s} = \frac{dr}{r}$, atque adeo $xVs = r$. Peracta ſubſtitutione habebimus $\frac{dr}{r} = \frac{sdz}{r}$, ſive $r = Ssdz$: Ergo $xVs = Ssdz$, ſive

$$x = \frac{Ssdz}{Vs} = \frac{Sdz.c^{S\frac{\overline{1+V}.pdp}{V.\overline{1+pp}}}}{V.c^{S\frac{\overline{1+V}.pdp}{V.\overline{1+pp}}}}.$$

Quare ſi coordinatæ curvæ ſint z, $Spdz$, alterius, quæ cum hac integrationem admittit, coordinatæ erunt

Sdz.

$$\frac{\mathrm{S}_{dz.c}\,\mathrm{S}\dfrac{\overline{1+\mathrm{V}}\cdot pdp}{\mathrm{V}\cdot\overline{1+pp}}}{\mathrm{S}_{\mathrm{V}.c}\dfrac{\overline{1+\mathrm{V}}\cdot pdp}{\mathrm{V}\cdot\overline{1+p}}} = \mathrm{S}\,p\cdot\mathrm{D}\,\frac{\mathrm{S}_{dz.c}\,\mathrm{S}\dfrac{\overline{1+\mathrm{V}}\cdot pdp}{\mathrm{V}\cdot\overline{1+pp}}}{\mathrm{S}_{\mathrm{V}.c}\dfrac{\overline{1+\mathrm{V}}\cdot pdp}{\mathrm{V}\cdot\overline{1+pp}}}.$$

Similiter ex identitate rationis ſi coordinatæ ſint x, $\mathrm{S}pdx$, alterius coordinatæ erunt illæ, quæ oriuntur ex ſuperioribus, ſi z mutetur in x. Atque hoc eſt novum theorema œcumenicum, quod deinceps ſecundum appellabitur. Nemo non videt, ex hac ſecunda curva inveniri tertiam, atque ita efformari ſeriem, quemadmodum antea fecimus.

Notandum judico, ſeriem præcedentem ex primo theoremate inventam per hoc ſecundum ad alteram partem non difficulter produci poſſe, ſi V detur ſolum per p. Verum ſi non detur per ſolam p, neceſſe eſt ita V dari per x, quemadmodum antea dabatur per z: quod in pleriſque caſibus non ita proclive eſt inventu. Harum ſerierum, quæ per haſce methodos efformantur, mirabiles ſunt proprietates, ſed haſce clare patefaciemus, dum hæc œcumenica theoremata alicui exemplo applicabimus.

Ad primum theorema redeamus, & per determinationem quantitatis V alia theoremata minus late patentia eliciamus. Horum autem omnium maxime ſimplex videtur eſſe, quod oritur ex determinatione $\mathrm{V} = pp$. In hac hypotheſi quum elementa coordinatarum datæ curvæ ſint dx, pdx, elementa coordinatarum curvæ quæſitæ erunt $p^2dx + 3xpdp$, $p^3dx + 3xp^2dp$, quæ integrata dabunt ordinatas

$$p^2x + \mathrm{S}xpdp \quad \text{ſive} \quad \tfrac{3}{2}p^2x - \tfrac{1}{2}\mathrm{S}p^2dx, \qquad p^3x$$

Hoc ipſum eſt theorema Joannis Bernoulli viri celeberrimi, cujus analyſim ex noſtra methodo facilem, & expeditam produximus.

Exemplum Bernoullii ſequentes applicemus hoc theorema parabolis, & ſupponamus curvæ datæ coordinatas eſſe x, $\dfrac{x^{m+1}}{\overline{m+1}\cdot\mathrm{A}^m}$: quare earum differentiæ erunt dx, $\dfrac{x^m dx}{\mathrm{A}^m}$: Ergo $p = \dfrac{x^m}{\mathrm{A}^m}$. Ex his

 deter-

determinationibus orientur curvæ quæſitæ coordinatæ $\frac{3m+1}{2m+1} \cdot \frac{x^{2m+1}}{A^{2m}}$, $\frac{x^{3m+1}}{A^{3m}}$. Haſce duas curvas conſtitui in appoſita tabella primam ad num. 1, inventam ad num. 2. Quum autem duarum curvarum ſumma ſit $= \overline{1+V} \,.\, x\sqrt{1+pp}$, erit ſubſtitutis valoribus $= x \,.\, \overline{1 + \frac{x^{2m}}{A^{2m}}}^{\frac{3}{2}} = x \,.\, \frac{\overline{A^{2m} + x^{2m}}^{\frac{3}{2}}}{A^{3m}}$. Quare ſi vocetur $\frac{\overline{A^{2m} + x^{2m}}^{\frac{3}{2}}}{A^{3m}} = Z$, fiet curvarum ſumma $= xZ$, ut in eadem tabella apparet.

Sed non contentus hac ſecunda curva, quæ ſtatim ex prima oritur, ex ſecunda invenio tertiam, ex tertia quartam, atque ita deinceps per methodum ſupra traditam; tum omnes in tabella appono, ut ſeries curvarum efformetur numeris poſitivis expreſſa. Litteræ autem B, C, D &c. ſemper deſignant coefficiens ſuperioris curvæ ita, ut $B = \frac{3m+1}{2m+1}$, $C = B \,.\, \frac{5m+1}{4m+1}$, $D = C \,.\, \frac{7m+1}{6m+1}$, atque ita deinceps. In hac autem ſerie quodlibet par habet curvas ſimul ſumptas rectificabiles, & quidem æquales illi quantitati, quæ in tabella appoſita eſt.

Producta hac ſerie ad partem inferiorem do operam, ut ad alteram etiam partem protraham. Hoc autem duplici methodo præſtari poteſt, vel per naturam ſeriei, quæ ſatis cognita eſt, ut protrahi poſſit, vel per alterum generale theorema, quod in caſu ad maximam ſimplicitatem conformatur. Hoc autem feci in tabella, & curvas appoſui ſub numeris negativis incipiendo a *o*. Hoc tamen diſcrimen intercedit inter inferiorem, & ſuperiorem curvam, quod in hac litteræ G, H, K &c. deſignant coefficientes ordinatæ curvæ inferioris ita, ut ſit $G = \frac{1}{m+1}$, $H = G \,.\, \frac{-2m+1}{-m+1}$, $K = H \,.\, \frac{-4m+1}{-3m+1}$, atque ita deinceps. Summa autem duarum curvarum apponitur ut ſupra.

Serie hac efformata exprime curvas per numeros, a quibus indicantur, atque hæc adnota

1 + 2

$$1 + 2 = xZ$$

$$2 + 3 = \frac{Bx^{2m+1}}{A^{2m}} Z$$: Ergo facta ſubtractione

$$1 - 3 = \frac{A^{2m}x - Bx^{2m+1}}{A^{2m}} . Z$$. Præterea

$$3 + 4 = \frac{Cx^{4m+1}}{A^{4m}} Z$$: Ergo facta additione

$$1 + 4 = \frac{A^{4m}x - BA^{2m}x^{2m+1} + Cx^{4m+1}}{A^{4m}} Z,$$

atque ita progrediendo reperies, primam additam alteri tenenti ſedem parem habere ſummam rectificabilem, imminutam autem altera tenente ſedem imparem habere differentiam rectificabilem. Quod dictum eſt de prima demonſtrabitur eadem ratione de omnibus aliis. Quare oritur hoc theorema: duæ quælibet curvæ ex noſtra ſerie, ſi alia ſit in ſede pari, alia in impari, habent ſummam rectificabilem; ſi ambæ in ſede pari, aut ambæ in impari, habebunt differentiam rectificabilem. Itaque non tantum verum eſt, quod a Bernoullio notatur, quamlibet parabolam habere aliam parabolam, cum qua conjuncta rectificatur, ſed etiam verum eſt, infinitas eſſe parabolas, quæ vel datæ additæ, vel a data detractæ rectificationem recipiunt.

Ex hoc infiniti alii arcus determinari poſſunt in noſtris parabolis, quorum ſumma, vel differentia rectificabilis eſt. Quod ut breviſſime indicem, ſit quælibet parabola ACG, in qua ſumpta abſciſſa AB determinetur arcus AC. Sit alia parabola AEM, quæ cum priori rectificationem recipiat. Abſcindatur analoga abſciſſa AD, & arcus AE ita, ut AC + AE æquet quantitatem algebraicam. Accipiatur alia abſciſſa AF major determinans arcum AG. Duo accidere poſſunt: primum ut abſciſſa analoga ſit major, quam AD, deinde ut ſit minor. Sit primo major, nempe AH, cui reſpondet arcus AM. Quoniam

AG + AM æquat algebraicam quantitatem.

Item AC + AE facta ſubtractione inveniemus arcus CG + EM rectificabiles eſſe. Sit deinde abſciſſa AK minor quam AD; habebimus arcus AG + AN, &

AC + AE rectificabiles: Ergo facta ſubtractione detegemus CG — EN rectificabiles. Q. E. I.

Si vero duarum parabolarum differentia rectificabilis ſit, in primo caſu habebimus

AG — AM, &

AC — AE rectificabiles: Ergo ſubtrahendo

EG — EM pariter rectificabilis. In ſecundo autem caſu per eandem methodum probabimus ſummam arcuum

CG + NE æquare quantitatem algebraicam.

Doctiſſimus Bernoullius optime advertit, ex parabola primaria cubica oriri parabolam primariam cubicam: quod ex noſtra ſerie ſatis colligitur, quia ſi ponas $m = -\frac{2}{3}$, curvæ datæ, quæ numero 1 adjacet, ordinatæ erunt x, $3A^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$; curvæ autem 2, quæ a prima naſcitur $\frac{3A^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{A^2}{x}$. Utraque vero curva invenitur eſſe parabola primaria cubica. Hoc tamen ineſt diſcriminis, quod in prima abſciſſæ accipiendæ ſunt in axe, in ſecunda capiendæ ſunt in tangente axi normale. Ex quo fit, ut curva tertia, quæ ex hac naſcitur non ſit amplius parabola primaria cubica, ſed altioris ordinis, nimirum parabola quinta ſeptimæ poteſtatis. Mira itaque videtur Bernoullio proprietas parabolæ cubicæ primariæ, cujus arcus conjunctus cum alio arcu ejuſdem curvæ rectificationem non reſpuit.

Verum proprietas hæc non convenit ſoli primariæ cubicæ, ſed etiam infinitis aliis parabolis. Namque tum in noſtra ſerie curvæ erunt ejuſdem ordinis, quoties index ordinatæ in ſuperiore diviſus per indicem abſciſſæ ſit æqualis indici abſciſſæ diviſæ per indicem ordinatæ in inferiore. Si hanc regulam adhibens efficias, ut duæ quælibet curvæ proxime ſint in eodem ordine, ſemper invenies parabolas primarias cubicas: ſed duæ hiſce proximis, quarum una in ſede inferiore, altera in ſede ſuperiore poſita eſt, erunt parabolæ quintæ ſeptimæ poteſtatis: quæ deinceps ſequuntur, erunt duæ parabolæ nonæ undecimæ poteſtatis: atque ita deinceps. Quare omnes parabolæ, cujus index ſit $= \frac{4n+1}{4n+3}$ exiſtente n numero integro, habent proprietatem, ut conjunctæ cum alia parabola ejuſdem ordinis rectificationem recipiant.

Quod ſi velis eſſe ejuſdem ordinis duas parabolas non propinquas, ſed quæ aliam mediam tenent, invenies parabolas tertias quintæ poteſtatis; quæ proximum locum obtinent, erunt parabolæ ſepti-

ſeptimæ poteſtatis nonæ; quæ ſequuntur parabolæ undecimæ poteſtatis decimætertiæ; atque ita deinceps. Omnes iſtæ parabolæ, quarum index generatim eſt $= \frac{4n+3}{4n+5}$ (n eſt aut numerus integer, aut o) minutæ arcu parabolico ejuſdem ordinis rectificationem admittunt. Quæ autem inter has medium tenet locum, invenies eſſe hyperbolam appollonianam. Plura alia de curvis, quæ in expoſita ſerie continentur adnotare poſſem: ſed Geometræ ſcribens ſuperfluum arbitror attingere, quæ ipſe per ſeſe videbit.

Deduximus ex noſtra methodo bernoullianum theorema: ſed quamplurima alia theoremata elicies, licet non ita ſimplicia atque elegantia, ſi indeterminatam V alia ratione determines; ut ſi ſtatuas

$1 + V = M \cdot \overline{1 + pp}$, vel univerſalius

$1 + V = M \cdot \overline{1 + pp}^{\,n}$, aut ſi ponas $V = \frac{M}{x}$. Verum omittenda non eſt determinatio maxime ſimplex, per quam ſi algebraica ſit curva data, etiam quæſita ſemper proveniet algebraica.

Supponamus $1 + V = \frac{M \cdot \overline{1+pp}}{x}$: Igitur $x + Vx = M \cdot \overline{1 + pp}$, & ſumptis differentiis, tranſpoſitiſque terminis $Vdx + xdV = 2Mpdp - dx$. Facta itaque ſubſtitutione coordinatarum differentiæ in curva quæſita erunt

$2Mpdp - dx + Mpdp \quad , \quad 2Mp^2dp - pdx + Mp^2dp$

ſive

$3Mpdp - dx \quad , \quad 3Mp^2dp - pdx$

& facta integratione

$\frac{3}{2}Mp^2 - x \quad , \quad Mp^3 - Spdx$. Si curva data ſit algebraica, poterit algebraice haberi $Spdx$: Ergo etiam curva inventa algebraica eſt. Utriuſque autem curvæ arcus ſimul ſumpti erunt $= M \cdot \overline{1 + pp}^{\frac{3}{2}}$. Hoc ſolum adverte, conſtantium ſæpe habendam rationem eſſe, quas omiſimus in integratione.

Si velis ſeriem conſtruere ex noſtra methodo, rem inutilem tentabis, nam cito ad eandem curvam redibis. Quod ut conſtet, fac $3Mp^2 - x = z$: Ergo curvæ coordinatæ ſunt

z, $Spdz$: Igitur curvæ, quæ ex hac naſcitur, coordinatæ inve-

invenientur, ſi novam conſtantem N introducas

$\frac{3}{2} Np^2 - z$, $Np^3 - Spdz$, & pro z

ejus valore ſubſtituto

$$\frac{3}{2} Np^2 - \frac{1}{2} Mp^2 + x \quad , \; Np^3 - \overline{S\,3Mp^2\,dp - p\,dx}$$

ſive

$$\frac{3}{2} . \overline{N - M} . p^2 + x \quad , \; \overline{N - M} . p^3 + Spdx.$$

Summa autem arcus ſuperioris, & hujus erit $= N . \overline{1 + pp}^{\frac{3}{2}}$: Ergo differentia inter arcum datæ, & modo inventæ $=$ $\overline{N - M} . \overline{1 + pp}^{\frac{3}{2}}$.

Si rurſus fiat $\frac{3}{2} . \overline{N - M} . p^2 + x = z$, invenientur ordinatæ novæ curvæ introducta tertia conſtante O

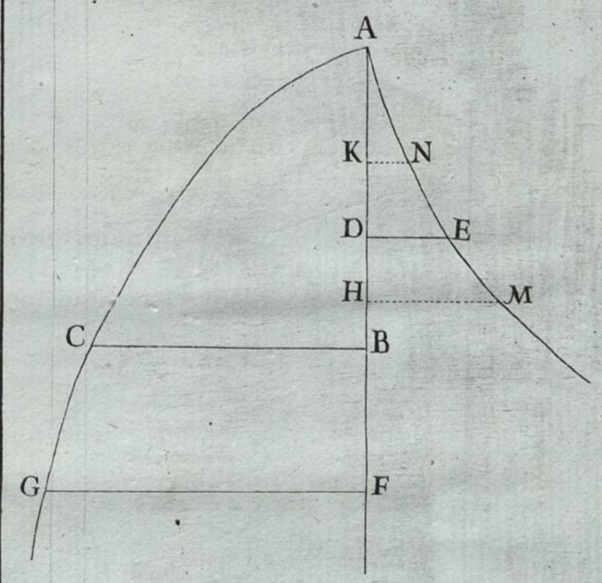
$$\frac{3}{2} . \overline{O - N + M} . p^2 - x, \; \overline{O - N + M} . p^3 - Spdx,$$

quæ non differt ab ea, quæ primum inventa eſt, namque quod in illa $= M$, in hac $= O - N + M$. Quare hæc determinatio quantitatis V ſeriem utilem ſuppeditare non poteſt.

Sed hæc ſatis ſint ad methodum indicandam. Tu interea geometriam, ut facis, cole, & perfice. Vale.

OPU-

pag. 150.



8.

	Abſciſſæ	*Ordinatæ*	*Curvarum ſumma in qua ponitur* $Z = \frac{\overline{A^{2m} + x^{2m}}^{\frac{3}{2}}}{A^{3m}}$
-3	I. $\frac{x^{-8m+1}}{A^{-8m}}$	I. $\frac{\overline{-8m+1} \,.\, x^{-7m+1}}{\overline{-7m+1} \,.\, A^{-7m}}$	I. $\frac{x^{-7m+1}}{A^{-5m}}$ Z
-2	K. $\frac{x^{-6m+1}}{A^{-6m}}$	K. $\frac{\overline{-6m+1} \,.\, x^{-5m+1}}{\overline{-5m+1} \,.\, A^{-5m}}$	K. $\frac{x^{-5m+1}}{A^{-5m}}$ Z
-1	H. $\frac{x^{-4m+1}}{A^{-4m}}$	H. $\frac{\overline{-4m+1} \,.\, x^{-3m+1}}{\overline{-3m+1} \,.\, A^{-3m}}$	H. $\frac{x^{-3m+1}}{A^{-3m}}$ Z
0	G. $\frac{x^{-2m+1}}{A^{-2m}}$	G. $\frac{\overline{-2m+1} \,.\, x^{-m+1}}{\overline{-m+1} \,.\, A^{-m}}$	G. $\frac{x^{-2m+1}}{A^{-2m}}$
1	x	$\frac{x^{m+1}}{\overline{m+1} \,.\, A^{m}}$	xZ
2	$\frac{\overline{3m+1} \,.\, x^{2m+1}}{\overline{2m+1} \,.\, A^{2m}}$	$\frac{x^{3m+1}}{A^{3m}}$	
3	B. $\frac{\overline{5m+1} \,.\, x^{4m+1}}{\overline{4m+1} \,.\, A^{4m}}$	B. $\frac{x^{5m+1}}{A^{5m}}$	B. $\frac{x^{2m+1}}{A^{2m}}$ Z
4	C. $\frac{\overline{7m+1} \,.\, x^{6m+1}}{\overline{6m+1} \,.\, A^{6m}}$	C. $\frac{x^{7m+1}}{A^{7m}}$	C. $\frac{x^{4m+1}}{A^{4m}}$ Z
5	D. $\frac{\overline{9m+1} \,.\, x^{8m+1}}{\overline{8m+1} \,.\, A^{8m}}$	D. $\frac{x^{9m+1}}{A^{9m}}$	D. $\frac{x^{6m+1}}{A^{6m}}$ Z
6	E. $\frac{\overline{11m+1} \,.\, x^{10m+1}}{\overline{10m+1} \,.\, A^{10m}}$	E. $\frac{x^{11m+1}}{A^{11m}}$	E. $\frac{x^{8m+1}}{A^{8m}}$ Z

OPUSCULUM DUODECIMUM.

De methodo Hermanni ad locos geometricos reſolvendos

EPISTOLA.

VINCENTIUS RICCATUS

PIO FANTONO

In Bononienſi Archigymnaſio Publico Geometriæ Profeſſori

S. P. D.

QUum eam methodum, quæ ad conſtruendos locos geometricos ſecundi gradus in Ac. Petrop. tomo quarto propoſita eſt ab Hermanno viro celeberrimo, probas, atque extollis, judicium tuum, Vir Clariſſime, plurimi facere, verbiſque commendare non deſino. Nam quamquam methodo illa non utor, quia a primis annis aliæ factæ mihi ſunt conſuetudine familiares; tamen ea nulli ſimplicitate, atque elegantia mihi videtur concedere. Verum in ea nonnihil obſcuritatis aliquando latere putas: in quo convenire tecum non poſſum. Etenim tametſi multa nimis jejune ab Hermanno tractata cenſeam, pleraque etiam, eaque magis difficilia prorſus omiſſa; tamen ita omnia, neque multis verbis explicari poſſe contendo, ut omni obſcuritate ſublata luce meridiana clariora fiant. Quando autem rogas (nihil enim tibi roganti negare poſſum) accipe aliquot propoſitiones, in quibus hypotheſes omnes Hermanni methodo clariſſime abſolvuntur.

PROPOSITIO PRIMA.

Æquationes primi gradus conſtruere.

UT Hermanni methodo utamur, danda eſt æquationi hujuſmodi forma $y = mx + n$, quod ſemper fieri poſſe certum eſt. Sume

Sume (*Fig.* 1) initium abſciſſarum in puncto A , abſciſſas autem x in recta AP poſitivas ad partem dexteram , negativas ad ſiniſtram : y poſitivæ ſurſum dirigentur , negativæ deorſum ; quod ſemper faciemus . Jam vero pone $x = o$, & fiet $y = n$. Quare ex puncto A , quod eſt abſciſſarum initium , erige ad quemcumque angulum AF $= n$, per punctum F tranſeat neceſſe eſt linea recta , quæ noſtræ æquationis ſit locus . Tum face $y = o$, & fiet $x = \frac{-n}{m}$. Itaque ad partem abſciſſarum negativarum ſume AD $= \frac{n}{m}$, & determinabitur aliud punctum D , per quod locus tranſeat . Si igitur jungas DF , habebis locum quæſitum , eruntque AP $= x$, PM $= y$, quæ quærebantur .

Si in æquatione $n = o$, tum facta $y = o$, prodiret $x = o$: quod indicat puncta D , A coincidere , & locum tranſire per punctum A initium abſciſſarum . Hoc quum accidat nihil juvat efficere $y = o$; prodiret enim $x = o$, neque novum loci punctum determinaretur . Quare ut hoc incommodum arceatur , ponenda eſt x æquales cuicumque conſtanti , ex ca. $= s$, & fiet $y = ms$. Abſcinde itaque AG $= s$, & excita G$\overset{\text{I}}{F}$ $= ms$ in quocunque angulo : punctum $\overset{\text{I}}{F}$ attingat , oportet , locus quæſitus . Itaque ducatur A$\overset{\text{I}}{F}$M , & ducantur MP parallelæ $\overset{\text{I}}{F}$G erunt AP $= x$, PM $= y$ æquationis propoſitæ .

Si $m = o$, liquet , locum quæſitum fore rectam parallelam lineæ abſciſſarum .

Ex harum conſtructionum ratione ſatis conſtat , quomodo obtinere poſſis , ut ordinatæ quemlibet angulum efficiant cum linea abſciſſarum . Quod ſi velis , ut locus ipſe cum ordinatis datum faciat angulum , hoc modo haud difficulter voti compos fiet . Super recta AD $= \frac{-n}{m}$ in caſu primo , aut AG $= s$ in caſu altero deſcribe circuli ſegmentum capiens angulum datum , in quo accommoda AF $= n$ in primo caſu , aut G$\overset{\text{I}}{F}$ $= ms$ in ſecundo caſu , locus per punctum determinatum tranſiens datum angulum faciet cum ordinatis . Angulus autem iſte rectus erit , quum ſegmentum deſcriptum fuerit ſemicirculus . Hanc animadverſionem neceſſarium fuit præmittere , quia illius deinceps indigebimus .

PRO-

PROPOSITIO ALTERA.

Æquatio $y = mx + n \pm \sqrt{px^2 + qx + r}$ pertinet ad Ellypſim, ſi p ſit negativa; ad Parabolam, ſi $p = o$; ad Hyperbolam, ſi p ſit poſitiva.

INjurius tibi eſſe viderer, ſi hujuſce propoſitionis demonſtrationem exponerem.

Æquatio omnis alterius gradus indeterminata, quæ contineat quadratum yy, poteſt, ut probe noſti, per extractionem radicis ad eam formam reduci, quam habet hujuſce propoſitionis æquatio.

PROPOSITIO TERTIA.

Æquationem $y = mx + n \pm \sqrt{qx + r}$ ad Parabolam pertinentem conſtruere.

ÆQuatio dividatur in duas, & ponatur pars rationalis $mx + n = z$, pars irrationalis $\pm \sqrt{qx + r} = u$. Harum prima conſtruatur per primam propoſitionem, cujus locus determinat poſitionem diametri ſectionis deſcribendæ. Poſita itaque linea abſciſſarum DAG (*Fig.* 2), & earundem initio in puncto A, locus rationalis æquationis ſit DVF, in quo poſita erit diameter Parabolæ, cujus conſtructio poſtulatur. Ut autem ejus vertex determinetur, ſumatur altera æquatio irrationalis, in qua ponatur $u = o$, & invenietur $x = \frac{-r}{q}$. Itaque accipienda eſt AH $= \frac{r}{q}$ ad partes negativarum abſciſſarum, quia valor negativus prodit, & ducenda conſtructi loci ordinata HV ſecans locum in puncto V: punctum hoc erit vertex diametri. Ad Parabolam deſcribendam aliud punctum determinandum eſt, per quod tranſeat. Hanc ob rem face $x = o$, & invenies $u = \pm \sqrt{r}$. Igitur ducta AF ordinatis parallela, ſume in ea ex utraque parte puncti F rectas FQ, Fq, quæ cum inter ſe æquales ſint, tum ſingulæ $= \sqrt{r}$: puncta Q, q erunt in ſectione deſcribenda. Quapropter diametro VF, tangente VH, vertice V deſcribatur Parabola tranſiens per punctum Q: hæc erit locus quæſitus, & AP erunt $= x$, PM $= y$ æquationis propoſitæ.

Si $r = o$, & puncta A, H coinciderent, tum ad determinandum punctum aliquod Q, per quod Parabola tranſeat, nihil juvaret facere $x = o$; ſed ponenda eſſet $x =$ cuicumque conſtanti, ex. ca. $= s$, & fiet $u = \pm \sqrt{qs}$. Quantitas autem s ita ſumenda eſt, ut $\sqrt{qs}$ non ſit imaginaria: quare ſi q poſitiva eſt & ipſa affirmativa ſit oportet, & vice verſa: opportunum fortaſſe erit ponere $s = q$; nam tum $\pm \sqrt{qs} = \pm q$ evadit. Quare ſecta AG $= s$ age $G\overset{I}{F}$ parallelam ordinatis, & ex utraque parte puncti $\overset{I}{F}$ duc $\overset{I}{F}\overset{I}{Q} = \overset{I}{F}\overset{I}{q} = \sqrt{qs}$, & duo puncta $\overset{I}{Q}$, $\overset{I}{q}$ in Parabola poſita determinabis.

Eodem artificio utaris neceſſe eſt, ſi r fuerit negativa. Nam quum $\sqrt{r}$ ſit imaginaria, per eam puncta curvæ non definientur. Quare facienda eſt in formula irrationali $x = s$, ut proveniat $u = \pm \sqrt{qs + r}$. Quantitas autem s non ſolum ita ſumenda eſt, ut qs ſit affirmativa, ſed etiam tam magna ſit oportet, ut $qs > r$. Cætera ut ſupra abſolvenda.

Si parametrum quæras ejus diametri, ad quam curva refertur, ajo eam eſſe $= \frac{FQ^2}{VF}$, vel $\frac{\overset{I}{F}\overset{I}{Q}^2}{V\overset{I}{F}}$.

PROPOSITIO QUARTA.

Conſtruere æquationem $y = mx + n \pm \sqrt{-px^2 + qx + r}$, quæ pertinet ad Ellypſim.

Fiat primum $mx + n = z$, deinde $u = \pm \sqrt{-px^2 + qx + r}$. Prima ex his conſtruatur per propoſitionem primam, & determinetur poſitio diametri, ut in ſuperiore (*Fig.* 3). Ut vertices determinentur, ponenda eſt $u = o$, & invenietur $x = \frac{q}{2p} \pm \sqrt{\frac{qq}{4pp} + \frac{r}{p}}$. Hi duo valores utrumque verticem determinant. Nam fiat $Ab = \frac{q}{2p} + \sqrt{\frac{qq}{4pp} + \frac{r}{p}}$, & $AH = \frac{q}{2p} - \sqrt{\frac{qq}{4pp} + \frac{r}{p}}$, & ex punctis b, H ordinentur bu, HV; u, V erunt vertices quæſiti, & Vu diameter. Si r negativa ſit, & major, quam $\frac{qq}{4p}$ omnia

fiunt

fiunt imaginaria, & conſtructio impoſſibilis. Si vero $r = \frac{-qq}{4p}$ puncta H, b, adeoque V, u coincidunt: qua de re Ellypſis redigitur ad punctum, & valores omnes y, & u imaginarii ſunt præter unum duntaxat, qui reſpondet abſciſſæ $= \frac{q}{2p}$.

Quando autem conſtructio poſſibilis eſt, ad determinandum aliud punctum, per quod Ellypſis tranſeat, face $x = o$, & invenies $u = \pm\sqrt{r}$. Abſcinde itaque F Q $=$ F$q = \sqrt{r}$; tum deſcribe Ellypſim habentem diametrum Vu, tangentem rectas V H, $u\,b$, & tranſeuntem per punctum Q, & obtinebis locum quæſitum.

Si r aut ſit $= o$, aut ſit negativa, ſupervacaneum eſt ſupponere $x = o$, quia in primo caſu fiet $u = o$, in ſecundo imaginaria. Quare fiat $x = s$, quæ quantitas ita ſumenda eſt, ut ſit media inter duas A$b = \frac{q}{2p} + \sqrt{\frac{qq}{4pp} + \frac{r}{p}}$, & A H $= \frac{q}{2p} - \sqrt{\frac{qq}{4pp} + \frac{r}{p}}$, ne valor quantitatis u proveniat imaginarius. In hac ſuppoſitione inveniemus $u = \pm\sqrt{-ps^2 + qs + r}$. Quare ſumpta A G $= s$, duc G $\overset{I}{\text{F}}$, in qua abſcinde $\overset{I}{\text{F}}\overset{I}{\text{Q}} = \overset{I}{\text{F}}\overset{I}{q} = \sqrt{-ps^2 + qs + r}$: puncta $\overset{I}{\text{Q}}$, $\overset{I}{q}$ ſpectant ad Ellypſim deſcribendam.

Ad inveniendam diametrum conjugatam fac advertas eſſe Hb $= 2\sqrt{\frac{qq}{4pp} + \frac{r}{p}}$: Ergo diviſa H$b$ biſariam in K fiet H K $=$ $\sqrt{\frac{qq}{4pp} + \frac{r}{p}}$: Ergo invenietur A K $= \frac{q}{2p}$: Igitur poſita in æquatione irrationali $x = \frac{q}{2p}$ inveniemus $u = \sqrt{\frac{qq}{4p} + r}$, cui ſemidiametri conjugatæ C T, C t æquabuntur.

Sæpe Ellypſis, quæ conſtruitur, circulus eſſe poteſt. Quæri autem poteſt, in quibus nam circumſtantiis hoc contingat: nam hoc cognito conſtructio evaderet multo ſimplicior, atque facilior. Ut curva deſcribenda ſit circulus, noſti, Vir Clariſſime, duas conditiones requiri. Prima eſt, ut ordinatæ concurrant cum diametro Vu ad angulos rectos: Ad habendam hanc conditionem neceſſe eſt ita conſtruere locum D F æquationis rationalis, ut ordinatæ A F faciant cum eodem angulum rectum: ſupra autem docuimus, quo pacto hoc fiat.

Altera conditio poſtulat, ut duæ diametri conjugatæ æquales

 ſint

ſint inter ſe. Quando autem inventa eſt diameter conjugata, invenienda eſt nunc diameter Vu, ut duæ diametri æquari poſſint. Hanc ob rem angulum, quem ordinatæ faciunt cum linea abſciſſarum, ut DAF voca $= \varphi$, ejus ſinus exprimatur per $Sin.\ \varphi$. ſinus totus per $Sin.\ t$. Manifeſtum eſt fore

$$Sin.\ t : Sin.\ \varphi :: Hb = 2\sqrt{\frac{qq}{4pp} + \frac{r}{p}} : Vu = \frac{2.\ Sin.\ \varphi}{Sin.\ t}\sqrt{\frac{qq}{4pp} + \frac{r}{p}};$$

Ejus dimidium $VC = \frac{Sin.\ \varphi}{Sin.\ t}\sqrt{\frac{qq}{4pp} + \frac{r}{p}}$. Semidiameter hæc facienda eſt æqualis ſemidiametro conjugatæ, & orietur æquatio $\sqrt{\frac{qq}{4p} + r} = \frac{Sin.\ \varphi}{Sin.\ t}\sqrt{\frac{qq}{4pp} + \frac{r}{p}}$, & facta diviſione per $\sqrt{\frac{qq}{4pp} + \frac{r}{p}}$, fiet $\sqrt{p} = \frac{Sin.\ \varphi}{Sin.\ t}$: Ergo $p = \frac{\overline{Sin.\ \varphi}^2}{\overline{Sin.\ t}^2}$. Quoties igitur ſervata prima conditione hujuſmodi ſit valor p, Ellypſis erit æquilatera, ſive circulus.

Angulus φ, ejuſque ſinus dependent a notis quantitatibus, quæ inſunt in rationali æquatione. Si fiat $AD = \frac{-n}{m}$, erit $AF = n$, & $DF = \frac{n}{m}\sqrt{1 - mm}$. Quare poſito ſinu toto $= \frac{n}{m}$, erit $Sin.\ \varphi = \frac{n}{m}\sqrt{1 - mm}$: Ergo $p = 1 - mm$. Itaque ſi $p = 1 - mm$, æquatio per circulum conſtrui poterit.

Etiamſi foret $n = o$, tamen eodem ratiocinio probarem, eundem provenire quantitatis p valorem. Quod ſi $m = o$, deberet $p = 1$. Quapropter aperte conſtat, quando conſtructio adhibito circulo poſſit abſolvi.

PROPOSITIO QUINTA.

Conſtruere æquationem $y = mx + n \pm \sqrt{px^2 + qx + r}$ ad Hyperbolam ſpectantem, quum r minor eſt, quam $\frac{qq}{4p}$.

Divide æquationem de more in duas $mx + n = z$, $u = \pm\sqrt{px^2 + qx + r}$. Primam conſtrue ut ſupra ex prima propoſitione, & determina rectam (*Fig.* 4) VD, quæ erit poſitio diametri hyperbolæ conſtruendæ. Ex altera vertices hujuſce diametri

tri definies, ſi ponas $u = o$: qua in hypotheſi invenies $x = \frac{-q}{2p} \pm \sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p}}$, qui valores reales erunt, quum poſita ſit $r < \frac{qq}{4p}$. Igitur abſcinde $AH = \frac{-q}{2p} - \sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p}}$, & $Ah = \frac{-q}{2p} + \sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p}}$, & ex punctis Hh, duc parallelas ordinatis HV, hu, quæ in recta VD determinabunt vertices V, u. Ut aliud punctum invenias, per quod curva tranſeat, fac $x = s$ cuicumque ſcilicet conſtanti, quæ tamen, ut imaginaria vites, oportet non ſit media inter rectas AH, Ah, ſed vel utraque major, vel utraque minor, & nanciſceris $u = \pm\sqrt{ps^2 + qs + r}$. Abſcinde itaque $AG = s$, & ducta $G\overset{I}{F}$ accipe $\overset{I}{F}\overset{I}{Q} = \overset{I}{F}\overset{I}{q} = \sqrt{ps^2 + qs + r}$: tum deſcribe hyperbolam, cujus diameter ſit Vu, tangens VH, & quæ tranſeat per puncta $\overset{I}{Q}$, $\overset{I}{q}$; locum quæſitum obtinebis.

Si rectarum AH, Ah vel utraque affirmativa ſit, vel utraque negativa, poteris facere $x = o$, & invenies $u = \pm\sqrt{r}$, quæ radix in noſtra hypotheſi erit realis. Ducta itaque AF parallela ordinatis, ſume $FQ = Fq = \sqrt{r}$; puncta Q, q erunt in hyperbola deſcribenda.

Caſus iſti omnes tractati ſunt in Hermanni opuſculo, in quo tamen deſiderantur multæ animadverſiones, quæ, quoniam neceſſariæ viſæ ſunt, a nobis non ſunt prætermiſſæ; ut ſi Hermannum legeris, plane cognoſces. De illis vero caſibus, quos in reliquis propoſitionibus conſideramus, ne verbum quidem fecit Hermannus.

PROPOSITIO SEXTA.

Eandem æquationem conſtruere, quum $r > \frac{qq}{4p}$.

CAſus iſte, qui cæteroquin omnium difficilimus eſt, per ea, quæ explicata ſunt, abſolvi nulla ratione poteſt. Nam ſi diviſa, ut ſupra, æquatione in duas fiat $u = o$, valor abſciſſæ x provenit imaginarius: quod non indicat, impoſſibilem eſſe conſtructionem, ſed æquationem ad ſecundam diametrum eſſe referendam. Quem caſum ut ſecundum Hermanni methodum tractemus, nihil judico opportunius, quam determinare vertices primæ diame-

tri

tri conjugatæ ejus, cui referenda eſt æquatio. Hanc ob rem advertentes primam ſemidiametrum minimam eſſe ex ordinatis applicatis ſecundæ diametro, poſſemus eam per methodum maximorum, & minimorum determinare. Sed quum geometricorum locorum doctrina iis plerumque tradatur, quibus ſublimiores theoriæ ignotæ ſunt, aliam viam ſequi, ſatius judicamus.

Fac advertas primam diametrum in hyperbola æqualiter diſtare a lineis æqualibus, quæ applicantur ejus diametro conjugatæ, ſive partem ſecundæ diametri interceptam inter duas ordinatas æquales dividi a prima diametro, aut a centro biſariam. Hoc autem centro invento nihil eſt facilius, quam primæ diametri magnitudinem definire. His præmiſſis, quæ certa ſunt,

Æquationem datam de more divide in duas $mx + n = z$, $u = \pm \sqrt{px^2 + qx + r}$. Primam conſtrue ut ſemper. Per alteram ut invenias expedite duas ordinatim applicatas u æquales inter ſe, pone $x = o$, & habebis $u = \pm \sqrt{r}$, quæ radix nunquam poteſt eſſe imaginaria, quia in hoc caſu $r > \frac{qq}{4p}$, quæ quantitas poſitiva eſt, quum in hyperbola p (*Fig.* 5) ſit poſitiva. Itaque ducta ordinatis parallela recta AF accipiatur $FQ = Fq = \sqrt{r}$, & puncta Q, q erunt in ſectione. Pro u introduc $\sqrt{r}$ in æquationem, & invenies $r = px^2 + qx + r$, ſive $px^2 + qx = o$, cujus radices ſunt $x = o$, $x = \frac{-q}{p}$: Ergo utrumlibet valorem habeat x, erit ſemper $u = \sqrt{r}$. Abſcinde itaque $AG = \frac{-q}{p}$, ductaque ordinata GH age $HR = Hr = \sqrt{r}$, & puncta R, r erunt in ſectione deſcribenda. Tum AG divide biſariam in E, & excita ordinatam EC, punctum C erit centrum hyperbolæ. Quoniam autem AE $= \frac{-q}{2p}$, hunc valorem pro x in æquatione ſubſtitue, & nanciſceris $u = \pm \sqrt{\frac{qq}{4p} - \frac{qq}{2p} + r} = \pm \sqrt{\frac{-qq}{4p} + r}$, qui eſt valor ſemidiametri primæ. Abſcinde igitur $CV = Cu = \sqrt{\frac{-qq}{4p} + r}$, atque ex prima diametro Vu deſcribe hyperbolam tranſeuntem per puncta Q, R, & habebis locum quæſitum.

In hoc caſu ſi habeatur $q = o$, & fiat $x = o$, proveniet $u = \pm \sqrt{r}$: quo valore in æquationem introducto erit $r = px^2 + r$, ſive $x^2 = o$. Quapropter quum uterque valor x nullus ſit, conſtat, ordinatam reſpondentem puncto A (*Fig.* 6) eſſe in prima diametro.

tro. Quare ordinata AC, punctum C erit centrum ſectionis, & ſumptis $CV = Cu = \sqrt{r}$, erunt V, u primæ diametri vertices. Ut reperias punctum aliud, per quod curva tranſeat, fac $x = s$, & erit $u = \pm\sqrt{ps^2 + r}$. Accipe $AE = s$, & ducta $E\overset{\text{I}}{F}$ fac $\overset{\text{I}}{F}\overset{\text{I}}{Q} = \overset{\text{I}}{F}\overset{\text{I}}{q} = \sqrt{ps^2 + r}$, atque ex prima diametro Vu deſcribe hyperbolam tranſeuntem per puncta $\overset{\text{I}}{Q}$, $\overset{\text{I}}{q}$, & locum æquationis obtinebis.

Si in data æquatione hyperbolæ inveniatur $r = \frac{qq}{4p}$, quod eſt velut confinium inter duos caſus expoſitos, tunc æquatio vertetur in hanc $y = mx + n + \overline{x + \frac{q}{2p}} . \pm\sqrt{p}$, quæ licet ſit ad lineas rectas, tractari tamen poteſt methodo ultimarum propoſitionum: in hoc enim caſu hyperbola in duas rectas mutatur.

Nihil jam reliquum eſt, niſi ut de illis æquationibus agamus, quæ, deficiente quadrato yy, ad ſuperiorem formam reduci non poſſunt. In his vel adeſt planum xy, vel ſecus. Utrumque genus duplex, quæ ſequitur propoſitio, complectetur.

PROPOSITIO SEPTIMA.

Æquationes illas conſtruere, in quibus deeſt non minus planum xy, quam quadratum yy.

ÆQuationes hujuſmodi ſemper reduci poſſunt in hanc formam $y = mx + n + px^2$. Hæc æquatio in duas dividenda eſt hoc pacto $z = mx + n$, $u = px^2$. Prima de more conſtruatur. In altera, quæ ſatis oſtendit parabolam, cujus locus DVF (*Fig.* 7) eſt tangens, ſi fiat $u = o$, invenietur $x = o$. Quare ex puncto A abſciſſarum initio duc ordinatam AV, quæ ſignabit punctum V, in quo parabola debet tangere lineam DV. Ut aliud punctum determines in curva poſitum, fac $x = s$, & erit $u = ps^2$. Igitur ſume $AG = s$, tum ducta ordinata GF, accipe $FQ = ps^2$. Demum ut habeas locum optatum, deſcribe parabolam, quæ tangat DF in V, & tranſeat per punctum Q.

Nihil facilius eſt, quam determinare parametrum diametri AV; eſt enim $= \frac{VF^2}{FQ} = \frac{s^2}{ps^2} = \frac{1}{p}$.

PRO-

PROPOSITIO OCTAVA.

Æquationes illas conſtruere, quæ planum xy, non autem quadratum yy continent.

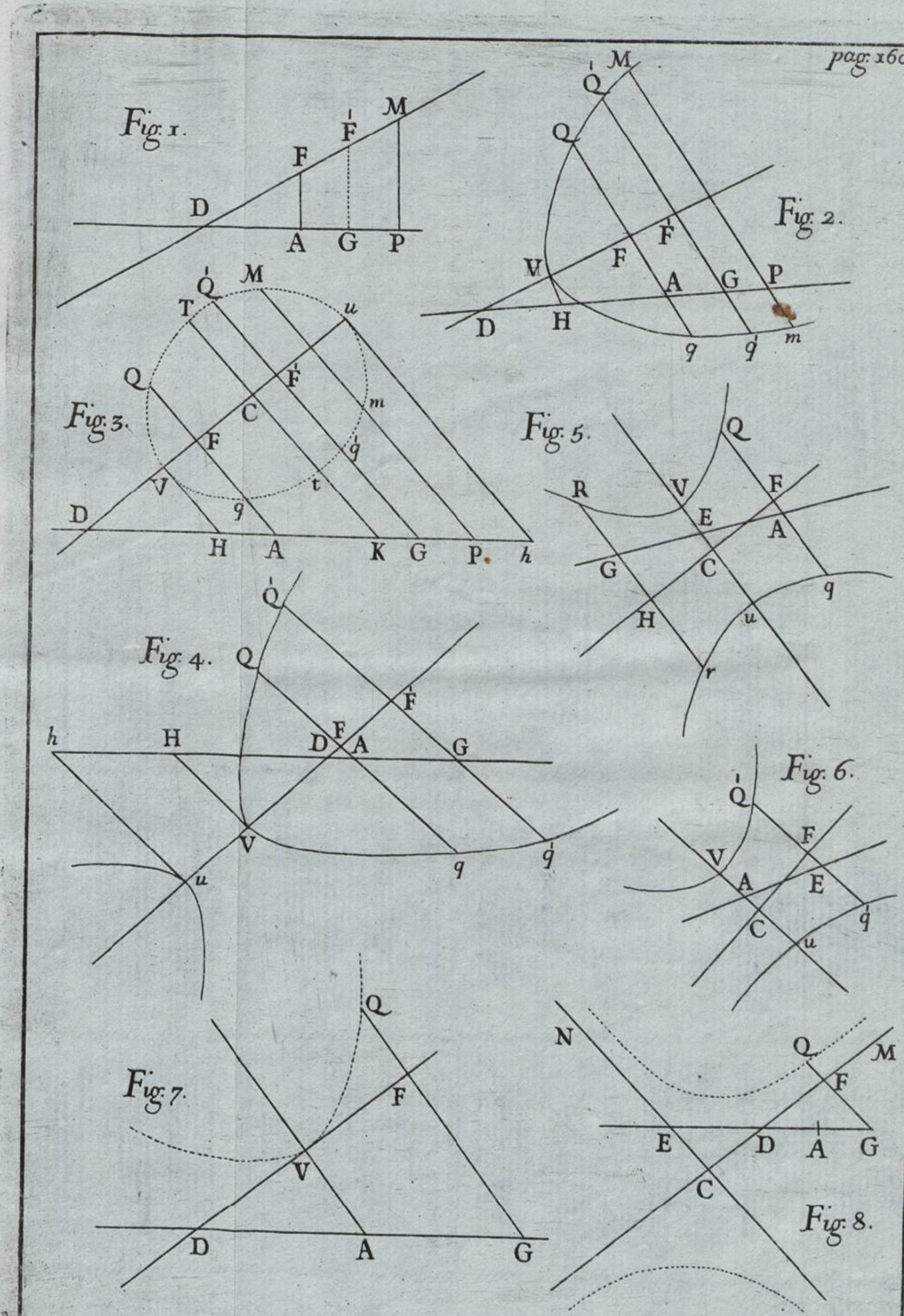
ÆQuationes, de quibus nunc agendum eſt, hanc formam ſemper accipere poſſunt $y = mx + n + \frac{p}{x+q}$. Efforma de more æquationes duas $z = mx + n$, & $u = \frac{p}{x+q}$. Hæc altera æquatio clare manifeſtat, æquationem referendam eſſe ad hyperbolam inter aſſymptotos. Quare ſi prima æquatio conſtruatur, ut ſemper factum eſt, determinabitur poſitio unius aſſymptoti DM (*Fig.* 8): Ut alterius aſſymptoti per ſecundam æquationem fiat determinatio, ponatur $u = \frac{1}{o}$, & invenietur $x = -q$. Abſcinde AE $= -q$, & per E age ordinatis parallelam NEC, quæ erit alterum aſſymptotum, & C erit centrum ſectionis. Ut habeas punctum per quod curva tranſeat, fac $x = s$ cuicumque ſcilicet conſtanti, & orietur $u = \frac{p}{s+q}$. Ergo ſumpta AG $= s$, ducta GF, & ſecta FQ $= \frac{p}{s+q}$ deſcribatur inter aſſymptotos CM, CN hyperbola tranſiens per punctum Q, ea erit locus quæſitus.

Quando non eſt $q = o$, utilius erit ponere x, ſeu $s = o$, ut facilius punctum per quod curva tranſeat, determinetur.

Hæc, quæ ad perficiendam elegantem Hermanni methodum inventa ſunt, poſtquam diligenter inſpexeris, nihil in ea tibi, Vir Clariſſime, obſcurum, nihil implicitum ſpero fore, ut videatur. Quoniam autem hæc ſcribens tuæ morem geſſi voluntati, abs te flagito, ut quæcunque tandem ſint, quemadmodum ſoles, æquo animo accipias. Vale, & geometriæ, boniſque artibus te diutiſſime conſerva.

Ex Col. S. Luciæ Kal. Januarii 1751.

OPU-


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.

OPUSCULUM TERTIODECIMUM.

De præcipuis pendulorum circularium, & cycloidalium proprietatibus.

EPISTOLA.

VINCENTIUS RICCATUS

VIRO NOBILI

ALPHONSO CO: MALVETIO

S. P. D.

SI qua eſt, Alphonſe ornatiſſime, in rebus phyſico-mathematicis inveſtigatio, quæ in adhibendis quantitatibus infinite parvis ſedulitatem, & cautionem deſideret, ea certe videri debet, quæ agit de oſcillationibus pendulorum per arcus minimos, quemadmodum doctorum virorum non contemnendi paralogiſmi demonſtrant. Gratum itaque me tibi facturum ſpero, ſi de re hac pro virili parte tractabo, tum quia rectum infinite parvorum uſum alieno periculo tibi oſtendam, tum quia hanc phyſices partem maxime neceſſariam geometrice demonſtrabo. Quam ob rem ſine, ut prius de pendulo cycloidali, tum de pendulo circulari, demum de eorum comparatione non minus clare, quam breviter diſſeram.

Ac primum Hugenianam propoſitionem de iſochroniſmo penduli cycloidalis, alia methodo demonſtrandam mihi propono. Ajo itaque corpus per cycloidem oſcillans eodem tempore ad punctum infimum perventurum. Sit cyclois (*Fig.* 1) BDA, cujus axis AE, & circulus genitor ALE: ajo mobile vel incipiat deſcendere ex puncto B, vel ex quolibet alio puncto D eodem tempore ad punctum A perventurum.

Sume arcus BG, DH, item eorum elementa G*g*, H*h*, quæ ſint in ratione integrorum arcuum AB, AD. Ex punctis B, D, G, H agantur lineæ BE, DF, GI, HK, quæ circumferentiam circuli genitoris ſecent in punctis E, L, M, N; & ducantur chordæ AL, AM, AN. Quoniam arcus AB eſt ad BG, ſicuti AD : DH,

 erit

erit etiam arcus AB : AG : : AD : AH : ſed ex cycloidis proprietate chordæ AE, AM, AL, AN ſunt dimidia arcuum AB, AG, AD, AH: Ergo erit AE : AM : : AL : AN : quare etiam eorum quadrata erunt proportionalia; nimirum $AE^2 : AM^2 :: AL^2 : AN^2$: ſed his quadratis proportione reſpondent AE, AI, AF, AK: Ergo erit AE : AI : : AF : AK: Ergo dividendo AE : EI : : AF : FK: & invertendo, permutandoque EI : FK : : AE : AF: ſed AE : AF eſt in ratione duplicata AE : AL, ſeu arcus AB : AD: Ergo EI : FK in ratione duplicata arcus AB : AD: ſeu viciſſim arcus AB ad arcum AD eſt in ratione dimidiata EI : FK.

His demonſtratis, quæ geometrica ſunt, quantitates phyſicas contemplemur. Velocitas, quam corpus deſcendens ex B habet in G, eſt ad velocitatem, quam corpus deſcendens ex D habet in H, in ratione dimidiata EI : FK: Ergo ex demonſtratis in ſimplici arcus AB ad arcum AD; ſed tempus per G*g* ad tempus per H*h* eſt in ratione compoſita directa G*g* : H*h*, ſeu arcus AB : AD, & inverſa velocitatum in G, H, ſeu arcus AB : AD: Ergo tempus per G*g* æquale eſt tempori per H*h*: quæ æqualitas quum valeat in omnibus elementis proportionalibus, conſtat eodem tempore corpus, vel incipiat deſcendere ex B, vel ex D, ad punctum A perventurum. Q. E. D.

Non eſt opus advertere, propoſitionem hanc veram eſſe, licet punctum D acceptum fuerit infinite proximum puncto A. Quum autem in percurrenda demicycloide BA indigeat corpus finito tempore, in percurrendo etiam infiniteſimo arcu DA tempus finitum impendit.

Opportunum jam eſt, comparare tempus deſcenſus cycloidalis cum tempore deſcenſus rectilinei. Hanc ob rem (*Fig.* 2) conferamus motum per integram demicycloidem BGA cum motu per ejus axem EA. Deſcribatur cycloidis circulus genitor AME, & ex quolibet puncto G agatur horizontalis GMI, eique infinite proxima *gmi*. Ducatur chorda AM, quæ ſecet GI in *n*, & BE in H, & agatur tangens MK, & chorda ME. Quoniam triangulum HME eſt rectangulum in M, & tangens MK æquat tangentem KE, punctum K erit centrum ſemicirculi tranſeuntis per puncta E, M, H: Ergo KH erit æqualis KE. Producatur AE in D, donec ED æquat AE.

His præmiſſis tempus, quo mobile motu æquabili velocitate ultimo acquiſita per deſcenſum ab EA conficit ſemicircumferentiam EMA, eſt ad tempus quo motu æquabili eadem velocitate percurrit DA ut ſemicircumferentia ad duplam diametrum: atqui tempus, quo motu æquabili velocitate acquiſita deſcendendo per EA percur-

rit

rit D A, eſt æquale tempori motus accelerati per eandem E A: Ergo tempus, quo motu æquabili velocitate acquiſita in deſcenſu per E A ſemicircumferentia conficitur, eſt ad tempus motus accelerati per E A ut demicircumferentia ad duplam diametrum.

Tempus per elementum G*g* ad tempus per elementum M*m*, dum circumferentia deſcribitur motu æquabili antea definito, eſt in ratione compoſita directa G*g* : M*m*, & reciproca velocitatis in G ad velocitatem in M. Sed prima ratio ſcilicet G*g* : M*m* eſt eadem ac ratio M*n* : M*m*, ſive MH : MK, ſive MH : KE. Secunda ratio nempe velocitatis in G ad velocitatem in M eadem eſt cum ratione dimidiata E I : E A, ſive cum ratione ſimplici ME : E A, ſive MH : HE: Ergo tempus per G*g* ad tempus motus æquabilis per M*m* in ratione compoſita directa MH : KE, & inverſa MH : HE, ſive in ratione ſimplici HE : KE, ſeu ut 2 : 1, ſeu ut D A : E A: quæ ratio, quandoquidem conſtans eſt, docet, tempus deſcenſus per demicycloidem B G A eſſe ad tempus motus æquabilis per ſemicircumferentiam EMA ut D A : E A.

Atqui antea demonſtratum eſt, tempus motus æquabilis per demicircumferentiam E M A eſſe ad tempus motus accelerati per E A ut ſemicircumferentia EMA ad duplam diametrum D A: ergo tempus motus per demicycloidem ad tempus deſcenſus per ejus axem E A ut demicircumferentia E M A ad ejus diametrum EA. Q. E. D.

Quum ex ſuperiori demonſtratione tempus deſcenſus per quemlibet arcum cycloidis æquale ſit tempori deſcenſus per integrum demicycloidem, & ex Galileo tempus deſcenſus per quamlibet chordam circuli AM ſit æquale tempori per diametrum, perſpicuum eſt, tempus per quemlibet cycloidis arcum eſſe ad tempus deſcenſus per quamlibet chordam circuli genitoris ut demicircumferentia ad diametrum. Quæ omnia vera ſunt, tametſi cum arcus, tum chorda accipiantur infiniteſimi.

Notum eſt, diametrum circuli oſculantis cycloidem in puncto A eſſe quadruplam diametro circuli genitoris: Ergo tempus deſcenſus per diametrum circuli oſculatoris eſt duplum temporis motus per diametrum circuli genitoris: Igitur tempus deſcenſus per arcum cycloidis ad tempus deſcenſus per diametrum circuli oſculatoris ut demicircumferentia ad duplam diametrum, ſeu ut quadrans ad diametrum. Quod item dicendum eſt de tempore caſus per quamlibet chordam circuli oſculatoris. Quod ſi velis comparare tempus motus per arcum cycloidis cum tempore motus per radium circuli oſculatoris debes advertere hoc tempus eſſe ad tempus deſcenſus per diametrum circuli genitoris ut $\sqrt{2} : 1$: Ergo tempus per cycloidem

X 2 ad

ad tempus motus per radium circuli oſculantis ut demicircumferentia ad diametrum multiplicatam per $\sqrt{2}$; quæ æqualis eſt diametro quadrati circulo circumſcripti, ſeu ſi mavis ut quadrans ad chordam quadrantis.

Antequam confero motum cycloidalem cum motu circulari, optimum judico, inſignem paralogiſmum patefacere, in quem inciderunt viri ſummi putantes, arcum minimum circuli, & ejus chordam eodem tempore confici; tum oſtendere majorem arcum circuli longiori tempore percurri quam minorem. Quod ſpectat ad primum Keillius, Parentius, Nicolaus de Martino, Muſſchembroekius, aliique viri non ignobiles animadvertentes, arcum minimum, ejuſque chordam adæquari, ſtatuerunt, mobile deſcendens primum per arcum, deinde per chordam impendere tempora, inter quæ adæquatio ſimiliter intercedat. Adverſus hos ſit hæc planiſſima demonſtratio.

Sit minimus arcus circuli ADB (*Fig.* 3) ejuſque corda AB. Ex centro circuli C ducatur quilibet radius COD, & ſumpto arcu D*d* infiniteſimo reſpectu AB jungatur radius C*d* ſecans chordam in *o*. Ex punctis D, O ducantur verticales DM, ON, & horizontales DG, OF.

His poſitis facile eſt demonſtratu, arcum ADB adæquare chordam AB, AD $=$ AO, D*d* $=$ O*o*, & DB $=$ OB: Ergo tempus per D*d* ad tempus per O*o* erit in ratione reciproca velocitatum in D, O, quas conſtat eſſe in ratione dimidiata rectarum DM, ON. Recta vero DM ita excedit ON, ut adæquari nulla ratione poſſint. Nam lineæ DM, NO ſunt infiniteſimæ ſecundi ordinis; ſed etiam earum differentia FG eſt ejuſdem ordinis. Nam demonſtratum eſt a Newtono DO eſſe infiniteſimam ſecundi ordinis: Ergo etiam FG, quæ cum DO finitam habet proportionem, erit infiniteſima ſecundi ordinis: Ergo hæc differentia FG finitam habet rationem cum lineis DM, ON: Igitur inter has intercedere adæquatio non poteſt. Quare conſtat tempus per arcum minimum circuli minus eſſe, quam tempus per ejus chordam, & nullo pacto ſuppoſitam ad æquationem ſubſiſtere.

Sed proportionem inter MD, NO penitius indagemus. Quapropter adverte demonſtratum eſſe a Newtono AG eſſe ad AE in ratione duplicata arcus AD ad arcum AB, ſive rectæ AO ad AB: Ergo dividendo erit AE $-$ AG, ſive EG : AE : : $AB^2 - AO^2 : AB^2$: : $\overline{AB - AO} \cdot \overline{AB + AO} : AB^2 :: BO \cdot \overline{AB + AO} : AB^2$.

Hoc

Hoc ſuppoſito MD : NO eſt in ratione $\begin{array}{l} MD : AE \\ AE : NO \end{array}$ compoſita : atqui prima ratio nempe MD : AE eadem eſt ac ratio EG : AE, ſeu ex demonſtratis $BO \cdot \overline{AB + AO} : AB^2$. Secunda ratio ſcilicet AE : NO eadem eſt ac AB : BO:

Ergo MD : NO in ratione $\begin{array}{l} BO \cdot \overline{AB + AO} : AB^2 \\ AB : BO \end{array}$ compoſita, ſive in ratione ſimplici $AB + AO : AB$. Atqui tempus per D*d* ad tempus per O*o* in ratione inverſa dimidiata MD : NO: Ergo etiam in ratione inverſa dimidiata $AB + AO : AB$: Ergo tempus per D*d* minus eſt tempore per O*o*. Quum autem omnia elementa arcus celerius percurrantur quam elementa chordæ, conſtat integrum arcum celerius confectum iri quam chordam. Q. E. D. Vides ex hac demonſtratione, quam caute adhibendæ ſint infinititeſimæ quantitates, ne illæ inter æquales habeantur, quarum differentia non ſit reſpectu ipſarum infiniteſima.

Galileus, & Balianus viri doctiſſimi, quibus mixtam matheſim acceptam referimus, decepti a quibuſdam experimentis a ſe inſtitutis, putaverunt, pendulum circulare eodem tempore cum longiores, tum breviores oſcillationes conficere. Imo Galileus ſæpe ex ſuis principiis demonſtrationem quæſivit, quam ſe numquam inveniſſe fatetur; neque enim falſæ propoſitionis demonſtratio inveniri poteſt. At vero in præſens, quoniam tibi gratum fore confido, demonſtrationem clariſſimam exponam, qua fiet palam, tempus deſcenſus per arcum circuli majorem majus eſſe tempore deſcenſus per arcum minorem.

Sit ſemicirculus GBA (*Fig.* 4), cujus centrum C. Sumantur arcus inæquales BA major, DA minor. Ajo, tempus per BA majus eſſe tempore per DA.

Ducta ex B indefinita horizontali BE, deſcribatur alter circulus ſecans BE in E ita, ut arcus AE ſit ſimilis arcui AD: quod problema facilem habet ſolutionem. Circulus autem deſcriptus ſit AEF, cujus centrum K. Hujus circuli radio KF æqualem duc horizontalem FH, junge HA, & age GI parallelam FH: conſtat GI fore æqualem radio circuli dati, nempe CG. Agatur quælibet horizontalis MPO, cui ſit infinite proxima *mpo*, & ducantur minimæ verticales *mr*, *os*. Jungatur HP ſecans GI in L. Accipiatur arcus DN ſimilis arcui EO, & elementum N*n* ſimile elemento O*o*. Demum ducantur radii CM, CN, KO.

Concipiamus tria pendula, quorum primum percurrat arcum BA,

BA, alterum arcum EA, tertium arcum DA, & comparemus tempora per tria elementa Mm, Oo, Nn. His poſitis tempus per Mm eſt ad tempus per Oo eſt ut $Mm : Oo$, ſive

in ratione $Mm : mr :: CM : MP$

compoſita $os : Oo :: OP : KO$: atqui

tempus per Oo ad tempus per $Nn :: \sqrt{KO} : \sqrt{CN} = \sqrt{CM}$:

Igitur tempus per Mm ad tempus per Nn erit

in ratione $CM : MP$ $\sqrt{CM} : \sqrt{KO}$

compoſita $OP : KO$, ſeu $OP : MP$: ſed prima ideſt

$\sqrt{KO} : \sqrt{CM}$

$\sqrt{CM} : \sqrt{KO} :: \sqrt{GI} : \sqrt{FH}$: altera nempe $OP : MP ::$

$\sqrt{\text{rec. } FPA} : \sqrt{\text{rec. } GPA} :: \sqrt{FP} : \sqrt{GP} :: \sqrt{FH} : \sqrt{GL}$:

Ergo tempus per Mm ad tempus per Nn in ratione $\sqrt{GI} : \sqrt{FH}$,

compoſita $\sqrt{FH} : \sqrt{GL}$

ſive in ratione ſimplici $\sqrt{GI} : \sqrt{GL}$. Atqui ubique GI major eſt quam GL: Ergo per ſingula elementa arcus BA tempus majus eſt, quam per ſingula elementa arcus DA. Igitur tempus per arcum BA majus eſt tempore per arcum DA. Q. E. D.

Si BA ſit arcus infiniteſimus, tum quælibet AP erit infiniteſima ſecundi ordinis: Ergo etiam PT, quæ ad AP finitam habet proportionem, erit infiniteſima ſecundi ordinis, ſicut & IL: Igitur accepta GV media proportionali inter GI, IL, erit IV infiniteſima ſecundi ordinis; ſed tempus per Mm eſt ad tempus per Nn ut $GI : GV$: Ergo differentia temporum per Mm, Nn eſt ad ipſa tempora ut infiniteſimum ſecundi ordinis ad finitum: Igitur tempora per Mm, Nn adæquantur. Quod quum de omnibus analogis elementis verum ſit, conſequitur adæquari tempora per arcus integros minimos BA, DA. Quare perſpicuum eſt, æquediuturnas eſſe minimas oſcillationes penduli circularis. Q. E. D.

Nihil reliquum eſt, niſi ut comparemus pendulum cycloidale cum circulari. Sit ſemicyclois BGA (*Fig.* 5), cujus axis EA, & ſemicirculus quilibet FHA, cujus radius KA. Producta BE in D intelligatur mobile deſcendere modo per cycloidem, modo per circulum ex punctis B, D, vel ex punctis æque altis P, Q. Ducatur quælibet horizontalis GO, cui ſit infinite proxima go. Quæritur quænam futura ſit proportio temporum deſcenſus per Gg, Oo. Deſcribe circulum genitorem cycloidis EMA; age chordas AM, AO, quæ duæ chordæ erunt inter ſe in ratione dimidiata diametrorum EA,

FA,

FA, ſive ducta AD in ratione ſimplici AD : AF; ſed arcus AG duplus eſt quam chorda AM: Ergo arcus AG ad chordam AO in ratione 2 : 1 compoſita AD : AF, ſive in ratione ſimplici AD : KA: Ergo differentia arcus nempe G*g* ad differentiam chordæ AO in eadem ratione AD : KA: hæc enim eſt conſtans: ſed ducta F*o* ſecante AO in *r*, notum eſt O*r* eſſe differentiam chordæ AO: Ergo G*g* : O*r* : : AD : KA. Atqui *r*O : O*o* : : F*o* : FA: Igitur G*g* : O*o* in ratione AD : KA, compoſita F*o* : FA, ſive ut rectangulum AD . F*o* : FA . AK. $=$ AH². Producta AD donec concurrat cum KH in I eſt AD : AH : : AH : AI: Ergo AH² $=$ AD . AI. Igitur G*g* : O*o* : : AD . F*o* : AD . AI : : F*o* : AI, ſive FO : AI. Quoniam vero mobilia ex punctis æque altis deſcendunt, tempora per G*g*, O*o* ſunt ut G*g* : O*o*: Ergo ut FO : AI. Q. E. I.

Ut conſtans AI ſit æqualis diametro AF, neceſſe eſt, ut diameter FA ſit quadrupla quam AE. Si autem AF ſit major quam quadrupla AE, AI major erit quam AF. Contra AI minor erit quam AF, ſi FA ſit minor, quam quadrupla AE.

Quum AI major eſt quam AF, erit etiam major quam quælibet FO: Ergo tempus per quodlibet elementum circulare O*o* majus erit, quam per reſpondens elementum cycloidis G*g*: Ergo mobile deſcendens per arcum DA, vel QA majus tempus impendet, quam deſcendens per arcum cycloidis BA, vel PA.

Pro caſu in quo AI ſit minor AF, quod contingit quum AF eſt minor quam quadrupla AE, inveniendus eſt caſus, ubi AI æqualis ſit rectæ FD. Hoc autem continget quando KA ſit æqualis EA, & punctum K cadat in E. Si autem AE major ſit quam AK: tum linea AI ſemper minor erit linea FD, ergo etiam qualibet linea FO: Ergo tempus per quodlibet O*o* minus eſt tempore per quodlibet elementum G*g*: Ergo tempus per arcum circularem integrum minus tempore per cycloidem.

Si vero AK ſit major AE, minor 2AE, tum AI verſus D erit major FO, in aliquo puncto æqualis, verſus A minor: Ergo initio elementa circularia longiori tempore percurrentur quam cycloidica, in fine autem breviori. Quare ſi inveniendus ſit arcus circularis, qui eodem tempore percurratur, ac cycloidicus, ejus radius neceſſario major erit axe cycloidis AE, minor, quam duplex AE.

Sed diligentius perpendendus eſt caſus, in quo AK $=$ 2AE: namque in hoc caſu pendula circulare, & cycloidicum cenſentur

habe-

habere eandem longitudinem, quum AK ſit radius circuli oſculantis cycloidem in puncto A. In hoc caſu quiſque videt tempus per quemlibet arcum circularem DA, vel QA majus eſſe tempore per cycloidem. Sed quum AI per majorem exceſſum ſuperet FO, quo magis hæc accedit ad punctum D, conſtat tempus per arcum circularem majorem magis ſuperare tempus per arcum cycloidis, quam tempus per arcum circularem minorem: Ergo majus eſt tempus per majorem arcum circuli, quam per minorem. Quare nova demonſtratione probatur falſum, quod opinabantur Galileus, & Balianus, iſochronas ſcilicet eſſe penduli circularis oſcillationes.

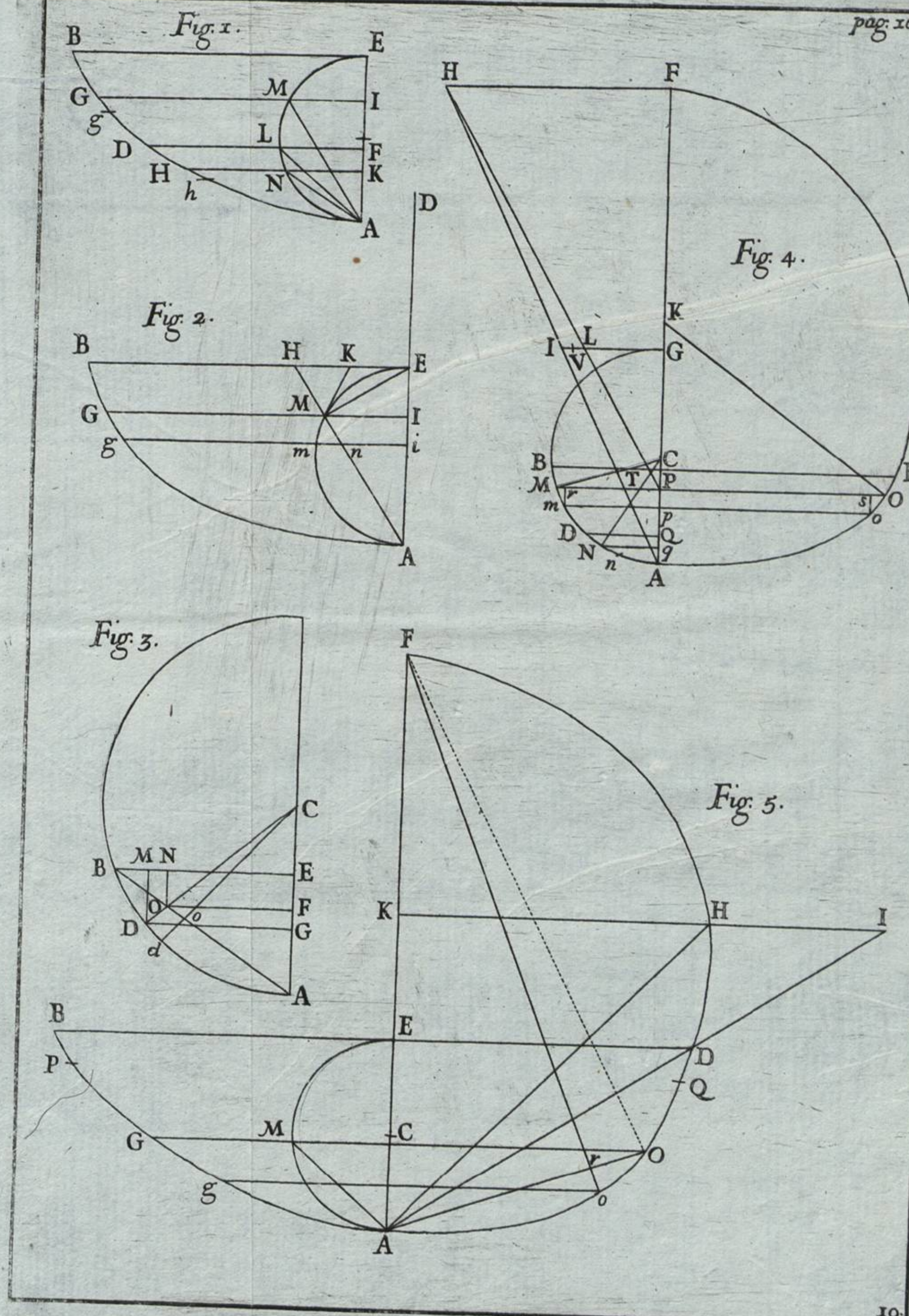
Si deſcenſus in circulo incipiat a puncto O infinite proximo puncto A, tum quælibet F*o* ſit æqualis FA, ſeu AI per adæquationem: Ergo tempus per minimum arcum AO æquale tempori per cycloidem. Ex quo nova demonſtratione colligitur oſcillationes per arcus minimos vel majores, vel minores iſochronas eſſe. Collige item, eraſſe eos, qui putarunt tempus per arcum circuli minimum OA æquale eſſe tempori per ejus chordam OA, ſeu per diametrum AF. Nam quum tempus per arcum OA ſit æquale tempori per cycloidem erit ad tempus per AF ut quadrans circuli ad diametrum, ut ſuperiores propoſitiones docent.

Habes hic, Alphonſe clariſſime, præcipuas pendulorum cum circularium, tum cycloidalium proprietates, ex quibus quanta praxis accipiat utilitatem, tibi notiſſimum eſt. Ex hiſce demonſtrationibus plane cognoſces, infinite parvorum uſum in abuſum facile degenerare, niſi ad vera principia animum advertamus. Quantitatum infinite parvarum differentiæ ſunt diligenter expendendæ. Si hæ reſpectu ad quantitates eaſdem minorem rationem habeant quacumque data, eæ quantitates tanquam æquales haberi poſſunt. Si vero differentia non ſit ejuſmodi, ſed ad quantitates finitam habeat proportionem, qui eas æquales fecerit, in manifeſtum incidet paralogiſmum. Velim tibi perſuadeas, me nihil prætermiſſurum, quod tibi, tuiſque ſtudiis eſſe poſſit utilitati. Vale.

Kal. Januarii 1753 ex Col. S. Luciæ.

FINIS OPUSCULORUM.

IN-


Fig. 1.
B E G M I g L F D K H N h A
Fig. 2.
D B H K E M G I g m n i A
Fig. 3.
C B M N E O F D o G d A
Fig. 4.
H F K I L G V B C T E M P r s O m o p D Q N q n A
Fig. 5.
F K H I B E P D Q M C G O r g o A

INDEX AUCTORUM,

Quorum mentio fit in hoc volumine.

Numerus paginas indicat. Littera n poſtpoſita numero ſignificat notas.

Actorum Lipſienſium Collectores. 137
Auctor hiſtor. liter. Italiæ. 136 *n.*

Balianus Joannes Baptiſta. 136, & ſeq., 165, 168
Barottus Joannes Andreas. 94 *n.*
Bernoullius Joannes. 141, 145, 147, 148
Blondellus. 137, 138
Bombellus Raphael. 45, 94 *n.*
Boſcovichius Rogerius. 12
Briggius. 43

Cardanus Hieronymus. 45, 94 *n.*, 129, & ſeq.
Cazreus. 137
de Chales Milliet Claudius. 137
Clairaut. 6, 8, 15
Corticellius Salvator. 136 *n.*

Eulerus Leonardus. 118

Fermatius Petrus. 137
Ferrarienſis Ludovicus. 45, 94 *n.*
de Ferrariis Ludovicus. 94 *n.*
Ferreus Scipio. 45, 130

Galileus Galileus. 136, & ſeq., 163, 165, 168
Gaſendus Petrus. 137
Gorius Antonius Franciſcus. 141 *n.*
Guldinus Paullus. 18, & ſeq.

Hermannus Jacobus. 6, 18, 123, 151, 157, 160
Hugenius Chriſtianus. 161

Keillius. 164
Keplerus. 123

de Martino Nicolaus. 164
Muſſchembroeckius Petrus. 164

Neperus Joannes. 43
Newtonus Iſaacus. 123, 164
Nicolas. 129, 131, 133

Pappus. 18
Parentius. 164

Torricellius Evangeliſta. 136 *n.*

Wallisſius Joannes. 123
Valtius Joannes Theophilus. 141
Varignonius Petrus. 6
Vivianus Vincentius. 136
Ulaquius. 43
Wolfius Chriſtianus. 45, 94 *n.*, 137 133.

INDEX RERUM,

Quæ in hoc volumine continentur.

Numerus paginam deſignat.

ÆQuationes aliquot differentiales evolvuntur per ſeries. 105, & ſeq.
aliæ. 118, & ſeq.
Æquationes cubicæ aliquot ſine imaginariis reſolvuntur. 129, & ſeq.
Æquationes determinantur, quæ habent radicem ſimilem radici cardanicæ. 45, & ſeq.
Æquationum radices hujuſmodi inveniuntur. 51, & ſeq.
Æquationum earumdem radices conſtruuntur per diviſionem arcus, aut logarithmi in partes æquales. 79, & ſeq.
Æquilibrii centrum. Vide centrum æquilibrii.
Arcuum duorum datis ſinibus, & coſinibus invenire ſinum, & coſinum ſummæ, ac differentiæ. 71, & ſeq.
Arcus ſinu, ac coſinu dato invenitur ſinus, & coſinus multipli. 76
Arcus minimus, ejuſque corda eodem tempore non percurruntur. 164, 168
Arcus circuli major longiori tempore conficitur, quam minor. 165, 168

Baliani ſententia de motu gravium. 136, & ſeq.
methodus ad leges motus gravium detegendas. 139

Centrum æquilibrii. 1, & ſeq.
conſtans in potentiis parallelis. 6
in illis, quæ ſunt ut diſtantiæ. 11, & ſeq.
determinatur in potentiis parallelis. 6, & ſeq.
in concurrentibus. 9, & ſeq.
Concoidis nicomedeæ quadratura. 25
Coſinus. Vide Logarithmus, & Arcus.
Coſinus circulares, & hyperbolici per ſeriem expreſſi. 115
expreſſi ſine uſu ſerierum. 116
Cubicarum aliquot æquationum radices ſine imaginariis exhibentur. 129, & ſeq.

Cycloidale pendulum probatur iſochronum. 161
Cyclois dat ſolutionem problematis Kepleriani. 124

Galilei methodus ad leges deſcenſus gravium inveſtigandas. 139
Gravitatis centrum. Vide Guldini regula.
Guldini regula exponitur. 18
probatur. 19, & ſeq.
limitibus coarcetur. ibid.
uſus in quadrandis ſpatiis. 24, & ſeq.
uſus in quadrandis ſuperficiebus curvis. 28
uſus in cubandis ſolidis. ibid.

Iſochroniſmus penduli circularis conficientis arcus minimos probatur. 166, 168
Iſochroniſmus penduli cycloidalis demonſtratur. 161

Keplerianum problema ſolvitur per cycloidem, & curvam ſinuum. 123, & ſeq.

Loci geometrici omnes Hermanni methodo reſoluti. 151, & ſeq.
a Logarithmica rotante circa aſſymptotum ſolidum genitum determinatur. 29
Logarithmorum ſyſtema multiplex. 30, & ſeq.
Logarithmus ex dato numero determinatur per ſeriem. 33
Logarithmo dato invenitur numerus. 37
Logarithmorum ſyſtema diverſum ex diverſitate proto-numeri. 39
ex diverſitate ſubtangentis. 40
ex diverſitate baſis logarithmicæ. 42
Logarithmorum genus duplex vulgare, & hyperbolicum. 41
Logarithmorum analogorum ſyſtema. 70
Logarithmorum duorum datis ſinibus, & coſinibus invenitur ſinus, & coſinus ſummæ, & differentiæ. 70
Logarithmi dato ſinu, & coſinu invenitur ſinus, & coſinus logarithmi multipli. 76

Numerus exprimitur per logarithmum. 113
Numerus. Vide Logarithmus.

Pendulum circulare non eſt iſochronum. 165, 168
Pendulum deſcribens arcus minimos circuli eſt iſochronum. 166, 168

Pen-

Pendulum cycloidale probatur iſochronum. 161
Potentia determinatur æquivalens duabus virgæ rigidæ applicatis,
ſi concurrant. 2
ſi ſint parallelæ. 3
Proportio temporum deſcenſus per demicycloidem, & ejus axem oſtenditur. 162
Proportio temporum inter oſcillationes circularem, & cycloidalem inquiritur. 166

Radices cardanicæ ſimiles. Vide Æquationes.
Radices cubicarum aliquot æquationum ſine imaginariis. 129, & ſeq.
de Rectificatione duarum curvarum ſimul acceptarum Theorema. 141, & ſeq.

Series exprimens numerum ex dato logarithmo. 37, 113
Series exhibens logarithmum ex dato numero. 33
Series exhibentes ſinus, & coſinus. 115
Series, per quas aliquot æquationes evolvuntur. 105, & ſeq.
Series numerorum naturalium ſumptis terminis infinitenis mutatur in ſeriem numerorum imparium. 127
Sinus. Vide Logarithmus, & Arcus.
Sinus circulares, & hyperbolici per ſeriem expreſſi. 115
ſine ope ſerierum. 116
Sinuum curva dat ſolutionem problematis Kepleriani. 124
Solutio problematis ad methodum inverſum tangentium ſpectantis. 95, & ſeq.
Spatia tempuſculis æqualibus peracta ſi ſint ut numeri naturales, ſpatia confecta temporibus finitis æqualibus erunt ut numeri impares. 126, & ſeq.

Tangens circularis expreſſa per arcum. 121
Tangens hyperbolica expreſſa per logarithmum. 121
Temporum deſcenſus per arcus circularem, & cycloidalem proportio inquiritur. 166
Temporum deſcenſus per demicycloidem, ejuſque axem proportio oſtenditur. 162
a Tractoria circa aſſymptotum rotante ſolidum, quod gignitur. invenitur. 29

Vidit

Vidit D. Salvator Corticellius Clericus Regularis Sancti Paulli, & in Eccleſia Metropolitana Bononiæ Pœnitentiarius pro Eminentiſſimo, & Reverendiſſimo Domino D. Vincentio Cardinali Malvetio Archiepiſcopo Bononiæ, & S. R. I. Principe.

5 Aprilis 1754.

IMPRIMATUR.

Fr. Cæſar Antoninus Velaſti Provicarius S. Officii Bononiæ.

QPCARD 201
© SUB GÖTTINGEN / GDZ | 2010